BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

DƯƠNG TRỌNG LUYỆN

VỀ MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VÀ HYPERBOLIC PHI TUYẾN SUY BIẾN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

DƯƠNG TRỌNG LUYỆN

VỀ MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VÀ HYPERBOLIC PHI TUYẾN SUY BIẾN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62.46.01.03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí

HÀ NỘI - 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả này được làm dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Minh Trí. Các kết quả trong luận án viết chung với thầy hướng dẫn đều đã được sự nhất trí của thầy hướng dẫn khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Nghiên cứu sinh: Dương Trọng Luyện

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Minh Trí. Thầy đã dẫn dắt tác giả làm quen với nghiên cứu khoa học khi tác giả còn là học viên cao học. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học sự động viên và lòng tin tưởng của thầy dành cho tác giả luôn là động lực giúp tác giả tin tưởng và say mê trong nghiên cứu khoa học. Với tấm lòng tri ân sâu sắc, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đối vời thầy.

Tác giả xin trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy giáo, cô giáo trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, các thầy giáo, cô giáo trong Phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, đã luôn giúp đỡ, động viện, tạo môi trường học tập nghiên cứu thuận lợi cho tác giả.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám hiệu, các anh chị em Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn quỹ NAFOSTED đã tài trợ cho tác giả trong suốt quá trình học nghiên cứu sinh.

Lời cảm ơn sau cùng, xin dành cho gia đình của tác giả, những người đã dành cho tác giả tình yêu thương trọn vẹn, từng ngày chia sẻ, động viên tác giả vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành luận án.

Mục lục

Trang

Lời cam đoan **1**

Lời cảm ơn **2**

Mục lục **3**

Một số quy ước và kí hiệu **5**

Mở đầu **6**

Tổng quan **10**

Chương1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **17**

1.1 Toán tử Δ_γ và một số không gian hàm 17

1.1.1 Toán tử Δ_γ 17

1.1.2 Một số không gian hàm 19

1.1.3 Một số tính chất 20

1.2 Tập hút toàn cục và tính chất 23

1.2.1 Một số định nghĩa 23

1.2.2 Một số tính chất 26

Chương2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ TÍNH CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC SUY BIẾN **28**

2.1 Một số định lí về sự tồn tại nghiệm yếu 28

2.1.1 Định lí về sự tồn tại nghiệm yếu 29

2.1.2 Định lí về sự tồn tại nghiệm yếu không âm 41

2.2 Tính chính quy của nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến 44

Chương3. TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH TRONG MIỀN BỊ CHẶN 52

3.1 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân 53

3.1.1 Đặt bài toán 53

3.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân 54

3.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . . 61

3.3 Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục 69

Chương4. TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN 82

4.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân 83

4.1.1 Đặt bài toán 83

4.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân 84

4.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^2_k(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ . . . 86

Kết luận và kiến nghị 111

Các kết quả đạt được 111

Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo 111

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án 113

Tài liệu tham khảo 113

MỘT SỐ QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, ta thống nhất một số kí hiệu như sau:

$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ thực N chiều.
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm.
$\mathbb{R}_+^*$	tập các số thực dương.
$\lvert x\rvert$	chuẩn Euclid của phần tử x trong không gian $\mathbb{R}^N$.
$C^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trong miền Ω.
$C_0^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω.
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm lũy thừa bậc p khả tích Lebesgue trong miền Ω.
H'	không gian đối ngẫu của không gian Banach H.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	đối ngẫu giữa H và H'.
$(\cdot,\cdot)_H$	tích vô hướng trong không gian H.
Id	ánh xạ đồng nhất.
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu.
$\hookrightarrow$	phép nhúng liên tục.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	phép nhúng compact.
$\mathrm{Vol}(\Omega)$	độ đo Lebesgue của tập Ω trong không gian $\mathbb{R}^N$.
Δ_x	Toán tử Laplace theo biến x trong $\mathbb{R}^{N_1}$: $\Delta_x = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
Δ_y	Toán tử Laplace theo biến y trong $\mathbb{R}^{N_2}$: $\Delta_y = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$.
Δ_z	Toán tử Laplace theo biến z trong $\mathbb{R}^{N_3}$: $\Delta_z = \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}$.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng được nghiên cứu đầu tiên trong các công trình của J. D'Alembert (1717-1783), L. Euler (1707-1783), D. Bernoulli (1700-1782), J. Lagrange (1736-1813), P. Laplace (1749-1827), S. Poisson (1781-1840) và J. Fourier (1768-1830), như là một công cụ chính để mô tả cơ học cũng như mô hình giải tích của Vật lí. Vào giữa thế kỷ XIX với sự xuất hiện các công trình của Riemann, lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng đã chứng tỏ là một công cụ thiết yếu của nhiều ngành toán học. Cuối thế kỷ XIX, H. Poincaré đã chỉ ra mối quan hệ biện chứng giữa lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và các ngành toán học khác. Sang thế kỷ XX, lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng phát triển vô cùng mạnh mẽ nhờ có công cụ giải tích hàm, đặc biệt là từ khi xuất hiện lí thuyết hàm suy rộng do S. L. Sobolev và L. Schwartz xây dựng.

Nghiên cứu các phương trình, hệ phương trình elliptic tổng quát và phương trình hyperbolic đã đóng vai trò rất quan trọng trong lí thuyết phương trình vi phân. Hiện nay các kết quả theo hướng này đã tương đối hoàn chỉnh. Cùng với sự phát triển không ngừng của toán học cũng như khoa học công nghệ nhiều bài toán liên quan tới độ trơn của nghiệm của các phương trình, hệ phương trình không elliptic và phương trình hyperbolic tắt dần suy biến đã xuất hiện. Có một số lớp phương trình, trong đó có lớp phương trình elliptic suy biến và phương trình hyperbolic tắt dần suy biến, ở một khía cạnh nào đó cũng có một số tính chất giống với phương trình elliptic và phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Δ. Tuy nhiên các kết quả đạt được cho các phương trình elliptic và

hyperbolic tắt dần suy biến vẫn còn ít, chưa đầy đủ. Với các lí do nêu trên chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là "**Về một số phương trình elliptic và hyperbolic phi tuyến suy biến**".

2. Mục đích nghiên cứu

• *Nội dung 1*: Nghiên cứu bài toán biên elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ với các nội dung sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán;

- Tính chính quy của nghiệm yếu.

• *Nội dung 2*: Nghiên cứu phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trong miền bị chặn với các nội dung sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân;

- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục;

- Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục.

• *Nội dung 3*: Nghiên cứu phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian với các nội dung sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân;

- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là xét bài toán biên và bài toán biên giá trị ban đầu có chứa toán tử elliptic suy biến

$$\Delta_\gamma := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\gamma_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

4. Phương pháp nghiên cứu

• Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân.

• Để nghiên cứu tính chính quy của nghiệm chúng tôi sử dụng định lí nhúng kiểu Sobolev và một số bất đẳng thức.

• Để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân chúng tôi sử dụng phương pháp nửa nhóm (xem [53, 59]).

• Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, chúng tôi sử dụng các công cụ và phương pháp của lí thuyết hệ động lực vô hạn chiều (xem [13, 14, 21, 22, 52, 58, 62, 74]), nói riêng là phương pháp phương trình năng lượng và phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm.

• Để chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục là bị chặn chúng tôi sử dụng phương pháp $\ell-$ quỹ đạo (xem [51, 55]).

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

• Đối với bài toán biên elliptic suy biến đưa ra và chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán với một số điều kiện của số hạng phi tuyến.Và cũng chứng minh được tính chính quy của nghiệm. Đây là nội dung của Chương 2.

• Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trong miền bị chặn: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục và đánh giá được số chiều fractal của tập hút. Đây là nội dung của Chương 3.

• Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục. Đây là nội dung của Chương 4.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học, và góp phần

vào việc hoàn thiện việc nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm yếu, tính chính quy của nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến, và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 04 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế, và đã được báo cáo tại

• Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

• Xêmina của phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam;

• Hội nghị quốc tế lần thứ V về nghiên cứu và giáo dục trong Toán học, Indonesia, 2012.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mở đầu, tổng quan, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án bao gồm 4 chương:

- Chương 1: *Một số kiến thức chuẩn bị.*

- Chương 2: *Sự tồn tại nghiệm và tính chính quy của nghiệm của bài toán biên đối với phương trình elliptic suy biến.*

- Chương 3: *Tập hút toàn cục đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trong miền bị chặn.*

- Chương 4: *Tập hút toàn cục đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trên toàn không gian.*

TỔNG QUAN

Các nghiên cứu về phương trình elliptic đã được đề cập khá nhiều trong các công trình [17, 29, 38, 39, 67] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Các kết quả đạt được đối với phương trình elliptic, hệ phương trình elliptic, phương trình parabolic, và phương trình hyperbolic tắt dần là tương đối trọn vẹn.

Năm 1970, nhà toán học người Nga V. V. Grushin đã đưa ra toán tử

$$G_k = \Delta_x + |x|^{2k}\Delta_y \text{ với } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}, N_1, N_2 \geq 1, k \in \mathbb{Z}_+$$

trong [32], tác giả V. V. Grushin đã đạt được các kết quả sau:

- Nếu $k = 0$ thì G_0 là elliptic trong miền Ω.
- Nếu $k > 0$ thì G_k không là elliptic trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ có giao khác rỗng với mặt $x = 0$.

Đây là ví dụ điển hình cho lớp toán tử hypoelliptic, nhưng không là elliptic. Nhà toán học V. V. Grushin đã chứng minh được nếu $G_k u$ là hàm khả vi vô hạn trong miền Ω thì u cũng khả vi vô hạn trong miền Ω và các tính chất địa phương của G_k được tác giả nghiên cứu khá đầy đủ trong [32]. Những kết quả mang tính tiên phong này đã thúc đẩy hàng trăm công trình nghiên cứu sau đó. Một số chuyên gia ngoài nước cũng đã nghiên cứu phương trình elliptic suy biến, phương trình parabolic suy biến, phương trình hyperbolic suy biến và cũng đã đạt được một số kết quả trong các công trình [15, 16, 31, 32, 40, 44–48, 61, 75] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Một số tác giả trong nước cũng đạt được các kết quả sâu sắc trong việc nghiên cứu các phương trình, hệ các phương trình elliptic suy biến phi tuyến, phương trình parabolic suy

biến, và phương trình hyperbolic suy biến. Các kết quả đã đạt được là: sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến, hệ phương trình elliptic suy biến trong các công trình [5, 6, 24–26, 42, 64, 66, 68–71] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic suy biến, trong các công trình [1–4, 7, 9, 56] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Tính điều khiển được của phương trình parabolic suy biến chứa toán tử Grushin trong các công trình [8, 9].

Năm 2012 các tác giả A. E. Kogoj và E. Lanconelli đã đưa ra toán tử tổng quát cho hai toán tử Grushin và toán tử P_{k_1,k_2} trong [44], đã chỉ ra số mũ tới hạn của định lí nhúng kiểu Sobolev, đồng nhất thức kiểu Pohozaev, chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính chính quy của nghiệm yếu của bài toán sau bằng phương pháp biến phân:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u - \eta u + f(X,u) = 0 \ \text{ trong } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

ở đó Ω là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $\eta \geq 0$ và $\Delta_\gamma u, \widetilde{N}$ được định nghĩa trong Chương 1.

Hàm $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn:

- $f(X,\xi) = o(\xi)$ khi $\xi \to 0$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$,
- $f(X,\xi) = o(\xi^{\frac{\widetilde{N}+2}{\widetilde{N}-2}})$ khi $\xi \to \infty$, đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$,
- Tồn tại hai hằng số $\mu > 2, u_0 > 0$ thỏa mãn $\xi f(X,\xi) > \mu F(X,\xi)$ với $|\xi| > u_0$ và $F(X,\xi) > 0$ với $\xi > u_0, F(X,\xi) = \int\limits_0^\xi f(X,\tau)\mathrm{d}\tau$.

Năm 2016 các tác giả C. T. Anh, và B. K. My trong [5] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của Bài toán (0.1) với $\eta = 0$ và điều kiện của $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn:

- $f(X,0)=0, \lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \frac{f(X,\xi)}{|\xi|^{2^*_\gamma-1}}=0, 2^*_\gamma=\frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}$;
- $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \frac{F(X,\xi)}{|\xi|^2} = 0$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$, trong đó $F(X,\xi)=\int\limits_0^\xi f(X,\tau)\mathrm{d}\tau$;
- $\limsup\limits_{|\xi|\to 0} \frac{F(X,\xi)}{|\xi|^2} < \mu_1$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$, với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\gamma$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
- Tồn tại $C_* \geq 0, \theta > 0$ thỏa mãn:

  $$H(X,\xi_1) \leq \theta H(X,\xi_2) + C_*, \forall \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}, 0<|\xi_1|<|\xi_2|, \forall X \in \Omega,$$

  trong đó $H(X,\xi)=\frac{1}{2}\xi f(X,\xi)-F(X,\xi)$.

Khi đó Bài toán (0.1) luôn có nghiệm yếu không tầm thường. Và nhiều kết quả đối với bài toán chứa toán tử $-\Delta_\gamma$ ta có thể xem trong [6, 46, 47, 50, 72, 73].

Các kết quả về sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic và toán tử elliptic suy biến trong miền bị chặn cũng đã đạt được một số kết quả nhất định. Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta u_t = \Delta u + f(X,u), \quad X \in \Omega, t>0, \\ u(X,t)=0, \quad X \in \partial\Omega, t>0, \\ u(X,0)=u_0(X), u_t(X,0)=u_1(X), \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, β là hằng số dương và $u_0(X) \in H_0^1(\Omega), u_1(X) \in L^2(\Omega)$.

- Năm 1984, J. K. Hale trong [34] và A. Haraux trong [37] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) với điều kiện sau $f(X,\xi) \equiv f(\xi) \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}), N \geq 3$ và thỏa mãn:

$$|f(\xi)| \leq C_0(|\xi|^{\rho+1}+1),\ 0 \leq \rho < \frac{2}{N-2},\ \liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1.$$

- Năm 1989, A. V. Babin and M. I. Vishik [13] đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) trong trường hợp số mũ tới hạn, tức là $\rho = \frac{2}{N-2}$ và sau đó được tổng quát bởi J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, và J. K. Hale [10].

- Năm 1988, R. Temam [62] đã chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) và năm 1994, E. Feireisl [28] đã chứng minh tập hút toàn cục có số chiều fractal là hữu hạn với điều kiện sau $f(X,\xi) \equiv g(\xi) + h(X), h(X) \in L^2(\Omega), g(\xi) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ thỏa mãn:

$$\liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{G(\xi)}{\xi^2} \geq 0,\ \liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{\xi g(\xi) - c_1 G(\xi)}{\xi^2} \geq 0,\ G(\xi) = \int_0^\xi g(\tau)\mathrm{d}\tau, c_1 > 0,$$

và

$$|g'(\xi)| \leq C_2(1+|\xi|^\rho) \text{ với } \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty & \text{khi } N = 1,2, \\ 0 \leq \rho < 2 & \text{khi } N = 3, \\ \rho = 0 \text{ (tức là } g' \text{ là bị chặn) khi } N \geq 4. \end{cases}$$

- Năm 1991, J. K. Hale and G. Raugel [36] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) với $N = 2, f(X,\xi) \equiv f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng mũ

$$f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ |f(\xi)| \leq e^{\theta(\xi)},\ \liminf_{|\xi|\to+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1,$$

trong đó θ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2} = 0.$$

- Năm 2004, J. M. Ball trong [14] đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) bằng phương pháp phương trình năng lượng với điều kiện của hàm $f(X,\xi) \equiv f(\xi)$ là hàm liên tục thỏa mãn $\liminf\limits_{|\xi|\to+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1$, λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất và $|f(\xi)| \leq C_0\left(1+|\xi|^{\frac{N}{N-2}}\right)$ nếu $N > 2, C_0 > 0$ là hằng số, $|f(\xi)| \leq e^{\theta(\xi)}$, nếu $N = 2$ trong đó θ là hàm liên tục thỏa mãn $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2} = 0$.

- Năm 2014, các tác giả A. E. Kogoj và S. Sonner trong [46], đã nghiên cứu Bài toán (0.2) suy biến có dạng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(X,t) + \beta u_t = \mathcal{L}u(X,t) + f(u(X,t)), \quad X \in \Omega, t > 0, \\ \qquad u(X,t) = 0, \quad X \in \partial\Omega, t > 0, \\ \qquad u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), \end{cases} \tag{0.3}$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, β là hằng số dương, $\mathcal{L}$ là toán tử $X-$ elliptic (xem [46, 48]), và $f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện:

- $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|(1 + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho)$, với $C > 0$, $0 \leq \rho < \frac{q-2}{2}$, q là hằng số được định nghĩa trong [46];
- $\limsup\limits_{|\xi|\to+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} < \mu_1$, với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\mathcal{L}$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất.

Khi đó Bài toán (0.3) có nghiệm toàn cục, có tập hút toàn cục và số chiều fractal của tập hút đó là hữu hạn.

Cùng với việc nghiên cứu Bài toán (0.2) nhiều tác giả cũng nghiên cứu bài toán đó trong miền không bị chặn và cũng đạt được một số kết

quả nhất định. Chúng ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = \Delta u + f(X,u), X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), \end{cases} \tag{0.4}$$

trong đó β là hằng số dương, $u_0(X) \in H^1(\mathbb{R}^N), u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

- Năm 1994, E. Feireisl trong [28], đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ của Bài toán (0.4) với $N = 3, \xi - f(X,\xi) \equiv g(X,\xi)$ thỏa mãn điều kiện:

- $g \in C^2(\mathbb{R}^4), g(\cdot,0) \in H^1(\mathbb{R}^3), \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}(X,0)\right| \leq C$, với mọi $X \in \mathbb{R}^3$,
- $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(X,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)$, với mọi $X \in \mathbb{R}^3, \xi \in \mathbb{R}$,
- $\liminf\limits_{|\xi|\to\infty} \frac{g(X,\xi)}{\xi} \geq 0$, đều với $X \in \mathbb{R}^3$,
- $\Big(g(X,\xi) - g(X,0)\Big)\xi \geq C\xi^2$, với mọi $\xi \in \mathbb{R}, |X| > r_1, C > 0$.

- Năm 2005, Fall Djiby trong [27], bằng cách sử dụng phương pháp ước lượng đuôi nghiệm đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của Bài toán (0.4) với điều kiện của hàm $f(X,\xi)$ như sau:

- $\xi - f(X,\xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X), h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
- $h_1 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), h_1(0) = 0, h_1(\xi)\xi \geq CF(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, trong đó C là hằng số dương, $F(\xi) = \int\limits_0^\xi h_1(\tau)\mathrm{d}\tau$
- $0 \leq \limsup\limits_{|\xi|\to+\infty} \dfrac{h_1(\xi)}{\xi} < \infty$.

- Năm 2009, H. B. Xiao trong [33], đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của Bài toán (0.4) với điều kiện của hàm $f(X,\xi)$ như sau:

- $\xi - f(X, \xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X), h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
- $h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), h_1(\xi)\xi \geq 0, |h_1'(\xi)| \leq C\left(1 + |\xi|^p\right), \forall \xi \in \mathbb{R}$, trong đó C là hằng số dương, $p > 0, p(N-2) \leq 2$.

Từ những kết quả ở trên, chúng ta thấy rằng đối với lớp phương trình elliptic suy biến và phương trình hyperbolic suy biến mặc dù đã có một số kết quả tuy nhiên các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở cần được nghiên cứu liên quan đến toán tử Δ_γ. Nói riêng, những vấn đề mở mà chúng tôi quan tâm trong luận án này (xin xem thêm phần Kết luận về những vấn đề mở khác) bao gồm:

- Nghiên cứu tính chính quy của nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ.
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ trong một số trường hợp của hàm phi tuyến.
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân và dáng điệu tiệm cận của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) của bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trong miền bị chặn và chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục là hữu hạn.
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân và dáng điệu tiệm cận của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) trong trường hợp bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị, bao gồm: Khái niệm toán tử Δ_γ, một số không gian hàm, các tính chất quan trọng sử dụng trong luận án, các kết quả tổng quát về lí thuyết tập hút toàn cục và một số kết quả bổ trợ được dùng cho các chương sau.

1.1 Toán tử Δ_γ và một số không gian hàm

1.1.1 Toán tử Δ_γ

Giả sử Ω là một miền bị chặn có biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$. Khi đó trong [44], chúng ta định nghĩa toán tử:

$$\Delta_\gamma := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} \left(\gamma_j^2 \partial_{x_j}\right), \quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

trong đó hàm $\gamma_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục và thỏa mãn $\gamma_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$ trong $\mathbb{R}^N \backslash \Pi$, với

$$\Pi := \left\{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{j=1}^{N} x_j = 0 \right\}.$$

Hơn nữa, chúng ta giả sử $\gamma_j(X)$ thỏa mãn các tính chất:

i) $\gamma_1(X) \equiv 1, \gamma_j(X) = \gamma_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}),\ j = 2, \ldots, N$;

ii) Với mỗi $X \in \mathbb{R}^N$ ta có $\gamma_j(X) = \gamma_j(X^*),\ j = 1, 2, \ldots, N$, trong đó

$$X^* = (|x_1|, \ldots, |x_N|) \text{ nếu } X = (x_1, x_2, \ldots, x_N);$$

iii) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ sao cho:

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \gamma_j(X) \leq \rho \gamma_j(X), \forall k \in \{1, 2, \ldots, j-1\}, \forall j = 2, \ldots, N,$$

với mỗi $X \in \mathbb{R}^N_+ := \left\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \ldots, N\right\}$;

iv) Tồn tại nửa nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \delta_t : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \delta_t(x_1, \ldots, x_N) = (t^{\varepsilon_1} x_1, \ldots, t^{\varepsilon_N} x_N) \end{aligned}$$

với $1 = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_N$, sao cho γ_j là δ_t – thuần nhất bậc $\varepsilon_j - 1$, tức là

$$\gamma_j(\delta_t(X)) = t^{\varepsilon_j - 1} \gamma_j(X), \forall X \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0, \ j = 1, \ldots, N.$$

Chúng ta định nghĩa $\widetilde{N}$ là số chiều thuần nhất của $\mathbb{R}^N$ cùng với nửa nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$, tức là

$$\widetilde{N} := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_N.$$

Ví dụ 1.1.1. Giả sử k là một số thực không âm. Khi đó toán tử

$$\Delta_\gamma := \Delta_x + |x|^{2k} \Delta_y,$$

trong đó

$$\gamma = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N_1 - \text{ số}}, \underbrace{|x|^k, \ldots, |x|^k}_{N_2 - \text{ số}}), x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1},$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, x_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}, N_1, N_2 \in \mathbb{N},$$

được gọi là toán tử Grushin (xem [31]).

Ví dụ 1.1.2. Giả sử k_1, k_2 là các số thực không âm. Khi đó toán tử

$$\Delta_\gamma := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \Delta_z,$$

trong đó

$$\gamma = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(N_1+N_2) - \text{ số}}, \underbrace{|x|^{k_1}|y|^{k_2}, \ldots, |x|^{k_1}|y|^{k_2}}_{N_3 - \text{ số}}), x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1},$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, x_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}, z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_3}, N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N},$$

được gọi là toán tử elliptic suy biến mạnh (xem [65, 73]).

1.1.2 Một số không gian hàm

Định nghĩa 1.1.3. Với $1 \leq p < \infty$, ta định nghĩa tập tất cả các hàm $u \in L^p(\Omega)$ sao cho $\gamma_j \partial_{x_j} u \in L^p(\Omega)$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, N$, là không gian $S^p_\gamma(\Omega)$.

Chuẩn trong $S^p_\gamma(\Omega)$ được định nghĩa là

$$\|u\|_{S^p_\gamma(\Omega)} = \left\{ \int\limits_\Omega \left(|u|^p + \sum_{j=1}^N \left|\gamma_j \partial_{x_j} u\right|^p \right) \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Nếu $p = 2$ chúng ta định nghĩa tích vô hướng trong $S^2_\gamma(\Omega)$ như sau:

$$(u, v)_{S^2_\gamma(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j \partial_{x_j} u, \gamma_j \partial_{x_j} v\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Không gian $S^p_{\gamma,0}(\Omega)$ định nghĩa như là bao đóng của $C^1_0(\Omega)$ trong không gian $S^p_\gamma(\Omega)$ với $C^1_0(\Omega)$ là tập các hàm trong $C^1(\Omega)$ có giá compact trong Ω.

Dễ dàng chứng minh được $S^p_\gamma(\Omega)$ và $S^p_{\gamma,0}(\Omega)$ là các không gian Banach, các không gian $S^2_\gamma(\Omega)$ và $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ là các không gian Hilbert.

Đặt

$$\nabla_\gamma u := (\gamma_1 \partial_{x_1} u, \gamma_2 \partial_{x_2} u, \ldots, \gamma_N \partial_{x_N} u), |\nabla_\gamma u| := \Big(\sum_{j=1}^N \left|\gamma_j \partial_{x_j} u\right|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nếu $\gamma = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N_1-\text{ số}}, \underbrace{|x|^k, \ldots, |x|^k}_{N_2-\text{ số}})$ thì chúng ta kí hiệu $G_k := \Delta_\gamma, S^2_{k,0}(\Omega) := S^2_{\gamma,0}(\Omega), \nabla_k := \nabla_\gamma$, và $N_k := \widetilde{N} = N_1 + (1+k)N_2$.

Nếu $\gamma = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(N_1+N_2)-\text{ số}}, \underbrace{|x|^{k_1}|y|^{k_2}, \ldots, |x|^{k_1}|y|^{k_2}}_{N_3-\text{ số}})$ thì chúng ta kí hiệu

$P_{k_1,k_2} := \Delta_\gamma, S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) := S^2_{\gamma,0}(\Omega)$, $\nabla_{k_1,k_2} := \nabla_\gamma$, và $N_{k_1,k_2} := \widetilde{N} = N_1 + N_2 + (1 + k_1 + k_2)N_3$.

Định nghĩa 1.1.4. Chúng ta định nghĩa không gian $S^2_k(\mathbb{R}^N)$ là bao đóng của không gian $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\|u\|_{S^2_k(\mathbb{R}^N)} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^2 + |\nabla_k u|^2 \right) \mathrm{d}X \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Khi đó không gian $S^2_k(\mathbb{R}^N)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng như sau:

$$(u,v)_{S^2_k(\mathbb{R}^N)} = (u,v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla_k u, \nabla_k v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

1.1.3 Một số tính chất

Từ Mệnh đề 3.2 và Định lí 3.3 trong [44] ta có:

Mệnh đề 1.1.5. *Giả sử $\widetilde{N} > 2$. Khi đó phép nhúng*

$$S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_\gamma}(\Omega), \text{ trong đó } 2^*_\gamma = \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2},$$

là liên tục. Hơn nữa, phép nhúng $S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ là compact với mỗi $q \in [1, 2^*_\gamma)$.

Mệnh đề 1.1.6 ([2], Bổ đề 2.1)**.** *Giả sử $N_k > 2$. Khi đó ta có*

$$S^2_k(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^N\right), \text{ trong đó } 2 \le p \le 2^*_k = \frac{2N_k}{N_k - 2}.$$

Lưu ý 1.1.7. Ta có chuẩn $\|u\|_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}$ và chuẩn

$$|||u|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

là tương đương.

Lưu ý 1.1.8. Nếu $\widetilde{N} > 2$ và Ω chứa gốc tọa độ thì định lí nhúng $S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}+\tau}(\Omega)$ là không đúng với mỗi τ là số dương. Thật vậy, ta đặt

$$\frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2} + \tau = p(\tau).$$

Lấy $\phi(X) \in C_0^\infty(\Omega)$ và $\phi(X) \neq 0$. Giả sử Θ là một số đủ lớn thỏa mãn $\phi_\theta(X) = \phi(\theta^{\varepsilon_1}x_1, \theta^{\varepsilon_2}x_2, \ldots, \theta^{\varepsilon_n}x_N) := \phi(X_\theta) \in C_0^\infty(\Omega)$ với mọi $\theta \geq \Theta$. Chúng ta xét hai số

$$A_\theta = \frac{\|\phi_\theta\|_{L^{p(\tau)}(\Omega)}}{|||\phi_\theta|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}} \quad \text{và} \quad A_1 = \frac{\|\phi\|_{L^{p(\tau)}(\Omega)}}{|||\phi|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\phi_\theta(X))^{p(\tau)}\,\mathrm{d}X \\
=\ &\int_\Omega \Big(\phi_\theta\left(\theta^{\varepsilon_1}x_1, \theta^{\varepsilon_2}x_2, \ldots, \theta^{\varepsilon_n}x_N\right)\Big)^{p(\tau)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_N \\
=\ &\frac{1}{\theta^{\widetilde{N}}}\int_\Omega \Big(\phi_\theta\left(\theta^{\varepsilon_1}x_1, \theta^{\varepsilon_2}x_2, \ldots, \theta^{\varepsilon_n}x_N\right)\Big)^{p(\tau)}\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_1}x_1\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_2}x_2\ldots\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_N}x_N \\
=\ &\theta^{-\widetilde{N}}\int_\Omega (\phi(X_\theta))^{p(\tau)}\,\mathrm{d}X_\theta,
\end{aligned}$$

do đó

$$\|\phi_\theta\|_{L^{p(\tau)}(\Omega)} = \theta^{-\frac{\widetilde{N}}{p(\tau)}}\|\phi\|_{L^{p(\tau)}(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
|||\phi_\theta|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^N |\gamma_j\partial_{x_j}\phi_\theta|^2\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\widetilde{N}}}\sum_{j=1}^N |\gamma_j\partial_{x_j}\phi_\theta|^2\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_1}x_1\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_2}x_2\ldots\mathrm{d}\theta^{\varepsilon_n}x_N\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Từ giả thiết iv), ta có

$$\gamma_j(x_1,\ldots,x_N)\partial_{x_j}\phi_\theta(X) = \theta^{-\varepsilon_j+1}\gamma_j(\theta^{\varepsilon_1}x_1,\theta^{\varepsilon_2}x_2,\ldots,\theta^{\varepsilon_n}x_N)\partial_{x_j}\phi_\theta(X),$$

và

$$\partial_{x_j}\phi_\theta(X) = \theta^{\varepsilon_j}\partial_{x_j}\phi(\theta^{\varepsilon_1}x_1,\theta^{\varepsilon_2}x_2,\ldots,\theta^{\varepsilon_n}x_N).$$

Do vậy

$$\begin{aligned} |||\phi_\theta|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} &= \theta^{1-\frac{\widetilde{N}}{2}}\left(\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^N |\gamma_j(x_\theta)\partial_{x_j}\phi(x_\theta)|^2 \mathrm{d}X_\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \theta^{1-\frac{\widetilde{N}}{2}}|||\phi|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2), ta có

$$A_\theta = \frac{\theta^{-\frac{\widetilde{N}}{p(\tau)}}\,\|\phi\|_{L^{p(\tau)}(\Omega)}}{\theta^{1-\frac{\widetilde{N}}{2}}|||\phi|||_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}} = \theta^{\frac{\widetilde{N}}{2}-1-\frac{\widetilde{N}}{p(\tau)}}A_1.$$

Do $\frac{\widetilde{N}}{2}-1-\frac{\widetilde{N}}{p(\tau)}>0$, nên $A_\theta \longrightarrow \infty$ khi $\theta \longrightarrow \infty$.

Định nghĩa 1.1.9. Cho H là không gian Banach. Ánh xạ $E : H \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi Fréchet tại điểm $u \in H$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính bị chặn $DE(u) \in H$ thỏa mãn

$$\frac{|E(u+v)-E(u)-DE(u)(v)|}{\|v\|_H} \to 0, \text{ khi } \|v\|_H \to 0.$$

Khi đó $DE(u)$ được gọi là đạo hàm Fréchet của E tại u. Hơn nữa, đạo hàm của E tại u theo hướng v kí hiệu bởi $\langle v, DE(u)\rangle := DE(u)(v)$.

Ánh xạ E là thuộc lớp C^1 nếu ánh xạ $u \mapsto DE(u)$ là liên tục.

Định lí 1.1.10 ([60], Định lí 1.2)**.** *Cho H là không gian Banach phản xạ và $M \subset H$ là tập đóng yếu trong H. Giả sử $E : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ là bức trên M, tức là*

1) $E(u) \to \infty$ *khi* $\|u\|_H \to \infty, u \in M$;

và E *là nửa liên tục dưới yếu trên* M*, tức là*

2) *Với mỗi* $u \in M$ *dãy* $\{u_n\} \subset M, u_n \rightharpoonup u$ *trong* H *thì*

$$E(u) \leq \liminf_{n\to\infty} E(u_n).$$

Khi đó E *bị chặn dưới trên* M *và đạt infimum trên* M.

1.2 Tập hút toàn cục và tính chất

1.2.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.2.1. [57] Giả sử H là một không gian Banach và $S(t) : H \to H$, với $t \geq 0$ là một họ các ánh xạ thỏa mãn

i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$,

iii) Với mỗi $t \geq 0, S(t) \in C(H, H)$;

iv) Với mỗi $u \in H, t \longmapsto S(t)u \in C((0, +\infty), H)$.

Khi đó $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm (phi tuyến) liên tục trên H.

Định nghĩa 1.2.2. [53] Họ ánh xạ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là một nửa nhóm tuyến tính liên tục mạnh trên H (hoặc đơn giản là C_0- nửa nhóm trên H) nếu $S(t) : H \to H$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn trên H với mọi $t \geq 0$, và

i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$,

iii) Với mỗi $u \in H, t \longmapsto S(t)u \in C([0, +\infty), H)$.

Định nghĩa 1.2.3. Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0- nửa nhóm trên H. Ta

định nghĩa toán tử sinh A của nó như sau:

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in H : \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ tồn tại trong } H \right\}, \\ Au &= \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \frac{\mathrm{d}^+(S(t)u)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}, \quad \forall u \in D(A). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.2.4. [57] Giả sử $S(t)$ là một nửa nhóm trên H.

1. Hàm $\Phi \in C(H, \mathbb{R})$ được gọi là hàm Lyapunov nếu

$$\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in H.$$

2. Hàm Lyapunov Φ được gọi là hàm Lyapunov ngặt nếu $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ với mọi $t \geq 0$, kéo theo u là điểm cân bằng, tức là $S(t)u = u$ với mọi $t \geq 0$.

3. Nửa nhóm $S(t)$ được gọi là hệ gradient liên tục nếu nó có hàm Lyapunov ngặt, và nửa nhóm $S(t)$ là nửa nhóm liên tục.

Định nghĩa 1.2.5. Một tập con khác rỗng $\mathcal{A}$ của H gọi là một tập hút toàn cục đối với nửa nhóm $S(t)$ nếu:

1. $\mathcal{A}$ là một tập đóng và bị chặn;

2. $\mathcal{A}$ là tập bất biến, tức là $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, với mọi $t \geq 0$;

3. $\mathcal{A}$ là hút mọi tập bị chặn, tức là với mọi tập bị chặn $\mathcal{B} \subset H$ thì $dist(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to 0$ khi $t \to +\infty$, ở đây

$$dist(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup_{a \in S(t)\mathcal{B}} \inf_{b \in \mathcal{A}} d(a, b).$$

Định nghĩa 1.2.6. Giả sử H là không gian Banach, nửa nhóm $S(t)$ gọi là compact tiệm cận nếu với mọi $t > 0, S(t)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t),$$

ở đó $S^{(1)}(t)$ và $S^{(2)}(t)$ thỏa mãn các tính chất sau

1. Với bất kỳ tập bị chặn $B \subset H$

$$\sup_{y \in B} ||S^{(1)}(t)y||_H \to 0, \text{khi } t \to +\infty.$$

2. Với bất kỳ tập bị chặn B trong H tồn tại t_0 sao cho bao đóng của

$$\bigcup_{t \geq t_0} S^{(2)}(t)B \text{ là compact trong } H.$$

Định nghĩa 1.2.7. Cho H là không gian metric đầy đủ.

a) Quỹ đạo dương của $x \in H$ là tập hợp $\gamma^+(x) = \{S(t)x : t \geq 0\}$.

Nếu $B \subset H$, thì quỹ đạo dương của B là tập hợp

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B = \bigcup_{z \in B} \gamma^+(z).$$

Tổng quát hơn, với $\tau \geq 0$, ta định nghĩa quy đạo sau thời điểm τ của B bởi $\gamma_\tau^+(B) = \gamma^+(S(\tau)B)$.

b) Phần tử $u_0 \in H$ được gọi là điểm cân bằng nếu $S(t)u_0 = u_0$ với mọi $t \geq 0$.

c) Giả sử u_0 là điểm cân bằng khi đó tập

$$W^u(u_0) = \left\{y \in H : S(t) \text{ xác định với mọi } t, S(-t)y \to u_0 \text{ khi } t \to +\infty\right\},$$

được gọi là đa tạp không ổn định của u_0.

d) Giả sử $A \subset H$, tập hợp

$$\omega(A) = \Big\{y \in H : \text{ tồn tại } t_n \geq 0, y_n \in A \text{ sao cho } t_n \to +\infty \text{ và } S(t_n)y_n \to y \text{ khi } n \to +\infty\Big\},$$

được gọi là tập $\omega-$ giới hạn của A.

Định nghĩa 1.2.8. Cho $\mathcal{M}$ là một tập compact trong không gian metric H. Khi đó số chiều fractal của $\mathcal{M}$ được định nghĩa như sau:

$$\dim_{fr}^{H}\mathcal{M} = \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\ln n(\mathcal{M},\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}},$$

trong đó $n(\mathcal{M},\epsilon)$ là số tối thiểu các hình cầu đóng có bán kính ϵ cần thiết dùng để phủ tập $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 1.2.9. [55] Giả sử H là một không gian Hilbert. Chúng ta nói ánh xạ $L : H \to H$ có "tính chất nén suy rộng" ("generalized squeezing property") trên tập $\mathcal{A} \subset H$ viết tắt là (GSP) nếu tồn tại hằng số $C > 0, \theta \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ và một phép chiếu trực chuẩn hữu hạn chiều P trong không gian H sao cho mỗi cặp $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, hoặc

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H \le C\left(\|P(x_1 - x_2)\|_H^2 + \|P(Lx_1 - Lx_2)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

hoặc

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H < \theta \|x_1 - x_2\|_H .$$

1.2.2 Một số tính chất

Định lí 1.2.10 ([57], Định lí 4.6)**.** *Giả sử $S(t), t \ge 0$ là một hệ gradient compact tiệm cận, thỏa mãn với mỗi tập bị chặn $B \subset H$, với $\tau \ge 0$ ta có $\gamma_\tau^+(B)$ là bị chặn . Khi đó, nếu tập các điểm cân bằng E bị chặn thì $S(t)$ có một tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A} = W^u(E)$. Hơn nữa, nếu H là không gian Banach thì $\mathcal{A}$ là liên thông.*

Bổ đề 1.2.11 ([23], Bổ đề compact Aubin-Lions)**.** *Giả sử H_0, H, H_1 là các không gian Banach sao cho H_0 nhúng compact trong H, H nhúng liên tục trong H_1 và H_0, H_1 là không gian phản xạ. Với $1 < p, q < \infty$, đặt*

$$W = \{u \in L^p(0,T;H_0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^q(0,T;H_1)\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;H_0)} + \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^q(0,T;H_1)}.$$

Khi đó W nhúng compact trong $L^p(0,T;H)$.

Định lí 1.2.12 ([53], Định lí Stone)**.** *A là toán tử sinh của một C_0 nhóm các toán tử unita trên không gian Hilbert H khi và chỉ khi iA là toán tử tự liên hợp.*

Định lí 1.2.13 ([53], Định lí 2.2)**.** *Giả sử $T(t) = e^{At}$ là một C_0 nửa nhóm. Khi đó tồn tại các hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$ thỏa mãn*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t},\ \forall\ t \in [0,\infty),$$

trong đó $\mathcal{L}(H)$ là tập các toán tử tuyến tính liên tục từ H vào H.

Bổ đề 1.2.14 ([55], Bổ đề 4.1)**.** *Cho H là một không gian Hilbert và $\mathcal{A} \subset H$ là tập bị chặn. Giả sử ánh xạ $L : \mathcal{A} \to H$ thỏa mãn $L(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, L$ là liên tục Lipschitz và thỏa mãn tính chất GSP trên $\mathcal{A}$. Khi đó $dim^H_{fr}\mathcal{A} < \infty$.*

Chương 2

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ TÍNH CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC SUY BIẾN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp bài toán biên elliptic chứa toán tử Δ_γ với một số điều kiện của số hạng phi tuyến và kết quả chúng tôi đạt được là các định lí về sự tồn tại của nghiệm yếu không tầm thường, định lí về tính chính quy của nghiệm. Chương này gồm hai phần:

- Phần thứ nhất: Trình bày một số định lí về sự tồn tại nghiệm yếu.

- Phần thứ hai: Trình bày tính chính quy của nghiệm của bài toán biên.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1], [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1 Một số định lí về sự tồn tại nghiệm yếu

Trong mục này tác giả sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ, phương pháp tác giả sử dụng ở đây là phương pháp biến phân. Cụ thể là tác giả xây dựng phiếm hàm sau đó kiểm tra phiếm hàm đó thỏa mãn các điều kiện của Định lí 1.1.10.

2.1.1 Định lí về sự tồn tại nghiệm yếu

Trong mục này tác giả xét bài toán sau:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + f(X,u) = 0 \quad \text{trong} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = u_0 \quad \text{trên} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^N$ và $u_0 = u_0(X) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Định nghĩa 2.1.1 (xem [25])**.** Giả sử $u, v \in S^2_\gamma(\Omega)$. Hàm v được gọi là nhỏ hơn hoặc bằng u trên $\partial\Omega$ nếu $\max\{0, v-u\} \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$, ta ký hiệu là $v \leq u$ trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.1.2. Hàm $u \in S^2_\gamma(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của Bài toán (2.1) nếu $u - u_0 \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ và

$$\int\limits_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int\limits_\Omega f(X, u(X))\, \varphi \mathrm{d}X = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Định nghĩa 2.1.3. Hàm $u \in S^2_\gamma(\Omega)$ được gọi là nghiệm dưới yếu của Bài toán (2.1) nếu $u \leq u_0$ trên $\partial\Omega$ và

$$\int\limits_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int\limits_\Omega f(X, u(X))\, \varphi \mathrm{d}X \leq 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Hàm $u \in S^2_\gamma(\Omega)$ được gọi là nghiệm trên yếu của Bài toán (2.1) nếu $u \geq u_0$ trên $\partial\Omega$ và

$$\int\limits_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int\limits_\Omega f(X, u(X))\, \varphi \mathrm{d}X \geq 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Từ Mệnh đề 7.2.1 trong [72], ta có:

Mệnh đề 2.1.4. *Giả sử* $f(X,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *thỏa mãn điều kiện* $|f(X,\xi)| \leq a(X) + b|\xi|^p$ *trong đó*

$$a(X) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega), 1 < p < \frac{\widetilde{N}+2}{\widetilde{N}-2}, b \in \mathbb{R}_+, u_0 = 0.$$

Khi đó u là nghiệm yếu của Bài toán (2.1) *khi và chỉ khi u là điểm tới hạn của phiếm hàm* $E(u)$ *định nghĩa bởi công thức:*

$$E(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}X - \int\limits_{\Omega} F(X, u(X))\,\mathrm{d}X,$$

trong đó $F(X,\xi) = \int\limits_0^{\xi} f(X,s)\,\mathrm{d}s$.

Định lí 2.1.5. *Cho* $\widetilde{N} > 2$. *Giả sử* $\underline{u}(X) \in S^2_\gamma(\Omega)$ *là nghiệm dưới yếu,* $\overline{u}(X) \in S^2_\gamma(\Omega)$ *là nghiệm trên yếu của Bài toán* (2.1) *và các hằng số* $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u}(X) \leq \overline{u}(X) \leq \overline{c} < +\infty$ *hầu khắp nơi trong* Ω, *và* $f(X,\xi)$ *thỏa mãn điều kiện* $|f(X,\xi)| \leq a(X) + b|\xi|^p$ *trong đó*

$$a(X) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega), 1 < p < \frac{\widetilde{N}+2}{\widetilde{N}-2}, b \in \mathbb{R}_+.$$

Khi đó tồn tại nghiệm yếu $u(X) \in S^2_\gamma(\Omega)$ *của* (2.1), *thỏa mãn điều kiện* $\underline{u}(X) \leq u(X) \leq \overline{u}(X)$ *hầu khắp nơi trong* Ω.

Chứng minh. Để chứng minh định lí trên chúng tôi sử dụng Định lí 1.1.10.

Đầu tiên chúng ta chứng minh định lí đúng với $u_0 = 0$. Thật vậy, ta định nghĩa phiếm hàm E trong không gian $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ như sau

$$E(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}X - \int\limits_{\Omega} F(X, u(X))\,\mathrm{d}X.$$

Đặt

$$M = \Big\{ u\,(X) \in S^2_{\gamma,0}\,(\Omega) : \underline{u}\,(X) \le u\,(X) \le \overline{u}\,(X) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \Big\}.$$

Ta có

$$\max\Big\{0, \underline{u}(X)\Big\} - \max\Big\{0, -\overline{u}(X)\Big\} = \begin{cases} \underline{u}(X) & \text{nếu } \underline{u}(X) \ge 0, \\ 0 & \text{nếu } \underline{u}(X) \le 0 \le \overline{u}(X), \\ \overline{u}(X) & \text{nếu } \underline{u}(X) \le \overline{u}(X) \le 0, \end{cases}$$

nên $\max\{0, \underline{u}(X)\} - \max\{0, -\overline{u}(X)\} \in M$, do vậy M là tập khác rỗng.

Ta cần chứng minh M là tập đóng yếu, và phiếm hàm E thỏa mãn các điều kiện của Định lí 1.1.10.

Lấy bất kỳ dãy $\{u_n(X)\} \subset M$ và $u_n(X) \to u(X)$ khi $n \to \infty$ trong $S^2_{\gamma,0}\,(\Omega)$. Do $\underline{u}\,(X) \le u_n\,(X) \le \overline{u}\,(X)$ hầu khắp nơi trong Ω với mọi n. Do vậy $\underline{u}\,(X) \le u\,(X) \le \overline{u}\,(X)$ hầu khắp nơi trong Ω. Nên M là tập đóng trong không gian $S^2_{\gamma,0}\,(\Omega)$.

Mặt khác với mọi $u(X), v(X) \in M$, với mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, ta có $\lambda\underline{u}\,(X) \le \lambda u\,(X) \le \lambda\overline{u}\,(X)$ hầu khắp nơi trong Ω, và $(1-\lambda)\underline{u}\,(X) \le (1-\lambda)v\,(X) \le (1-\lambda)\overline{u}\,(X)$ hầu khắp nơi trong Ω. Do vậy $\underline{u}\,(X) \le \lambda u\,(X) + (1-\lambda)v(X) \le \overline{u}\,(X)$ hầu khắp nơi trong Ω. Nên M là tập lồi.

Do M là tập lồi và đóng trong $S^2_{\gamma,0}\,(\Omega)$ nên theo Định lí Mazur, ta có M là tập đóng yếu trong $S^2_{\gamma,0}\,(\Omega)$.

Từ giả thiết ta có $|F(X, u(X))| \le a(X)|u(X)| + \frac{b}{p+1}|u(X)|^{p+1}$. Do đó

$$\int_\Omega F(X, u(X))\mathrm{d}X \le \int_\Omega \left(a(X)|u(X)| + \frac{b}{p+1}|u(X)|^{p+1} \right) \mathrm{d}X,$$

suy ra

$$\int_\Omega F(X, u(X))\mathrm{d}X \le C, \quad \forall u(X) \in M.$$

Nên

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} - C \Rightarrow E(u) \to \infty \text{ khi } \|u\|_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} \to \infty,$$

Nên E là bức trên M.

Ta chứng minh $E(u)$ là nửa liên tục dưới yếu trên M. Thật vậy, giả sử $u_n \rightharpoonup u$ trong $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$, với $u_n, u \in M$. Ta có

$$\begin{aligned}
|F(X,u_n) - F(X,u)| &= \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}F(X, u+\theta(u_n-u))}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\
&= \left|\int_0^1 F'_\theta(X, u+\theta(u_n-u))(u_n-u)\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(X, u+\theta(u_n-u))||u_n-u|\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_0^1 \Big(a(X) + b|(u+\theta(u_n-u))^p|\Big)|u_n-u|\mathrm{d}\theta \\
&\leq C\Big(a(X) + |u|^p + |u_n|^p\Big)|u_n-u|.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\int_\Omega |F(X,u_n) - F(X,u)|\mathrm{d}X \leq C\int_\Omega \Big(a(X) + |u|^p + |u_n|^p\Big)|u_n-u|\mathrm{d}X.$$

Nên

$$\int_\Omega F(X, u_n(X))\mathrm{d}X \to \int_\Omega F(X, u(X))\mathrm{d}X \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Do đó $E(u)$ là nửa liên tục dưới yếu trên M. Nên theo Định lí 1.1.10 ta có tồn tại $u \in M$ là điểm cực tiểu của phiếm hàm $E(u)$.

Tiếp theo chúng ta cần chứng minh u là nghiệm yếu của Bài toán (2.1).

Với mỗi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ và $\varepsilon > 0$, đặt

$$\begin{aligned}
\Omega^\varepsilon &= \Big\{X \in \Omega, u(X) + \varepsilon\varphi(X) \geq \overline{u}(X) > u(X)\Big\},\\
\Omega_\varepsilon &= \Big\{X \in \Omega, u(X) + \varepsilon\varphi(X) \leq \underline{u}(X) < u(X)\Big\},\\
\Omega^0 &= \Big\{X \in \Omega, u(X) = \overline{u}(X)\Big\}, \Omega_0 = \Big\{X \in \Omega, u(X) = \underline{u}(X)\Big\},\\
\varphi^\varepsilon &= \max\Big\{0, u(X) + \varepsilon\varphi(X) - \overline{u}(X)\Big\} \geq 0,\\
\varphi_\varepsilon &= -\min\Big\{0, u(X) + \varepsilon\varphi(X) - \underline{u}(X)\Big\} \geq 0,\\
v_\varepsilon &= \min\Big\{\overline{u}\,(X)\,, \max\Big\{u\,(X) + \varepsilon\varphi\,(X)\,, \underline{u}\,(X)\Big\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Nếu $\overline{u}(X) \leq \max\Big\{u(X) + \varepsilon\varphi(X), \underline{u}(X)\Big\}$ thì

$$v_\varepsilon = \overline{u}(X),\ \max\Big\{u(X) + \varepsilon\varphi(X), \underline{u}(X)\Big\} = u(X) + \varepsilon\varphi(X),$$

nên $\varphi^\varepsilon = u(X) + \varepsilon\varphi(X) - \overline{u}(X), \varphi_\varepsilon = 0 \Rightarrow v_\varepsilon = u\,(X) + \varepsilon\varphi\,(X) - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon$.
Nếu $\overline{u}(X) \geq \max\Big\{u(X) + \varepsilon\varphi(X), \underline{u}(X)\Big\}$ thì

$$\begin{aligned}
v_\varepsilon &= \max\Big\{u(X) + \varepsilon\varphi(X), \underline{u}(X)\Big\}\\
&= \begin{cases} u(X) + \varepsilon\varphi(X) & \text{khi } u(X) + \varepsilon\varphi(X) \geq \underline{u}(X)\\ \underline{u}(X) & \text{khi } u(X) + \varepsilon\varphi(X) \leq \underline{u}(X). \end{cases}
\end{aligned}$$

+) Với $v_\varepsilon = u(X) + \varepsilon\varphi(X)$ suy ra $\varphi^\varepsilon = 0, \varphi_\varepsilon = 0$.
Nên $v_\varepsilon = u\,(X) + \varepsilon\varphi\,(X) - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon$.
+) Với $v_\varepsilon = \underline{u}(X)$ suy ra $\varphi^\varepsilon = 0, \varphi_\varepsilon = \underline{u}(X) - u\,(X) - \varepsilon\varphi\,(X)$.
Nên $v_\varepsilon = u\,(X) + \varepsilon\varphi\,(X) - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon$.
Do đó

$$v_\varepsilon = u\,(X) + \varepsilon\varphi\,(X) - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon,$$
$$v_\varepsilon \in M, \varphi_\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in S^2_{\gamma,0}\,(\Omega) \cap L^\infty\,(\Omega)\,.$$

Do u là điểm cực tiểu của E trong M và M là tập lồi, nên ta có $u + t(v_\varepsilon - u) \in M$ với mọi $t \in [0,1]$ và

$$\frac{E(u + t(v_\varepsilon - u)) - E(u)}{t} \geq 0, \forall t \in (0,1].$$

Do vậy

$$0 \leq \langle v_\varepsilon - u, DE\,(u)\rangle = \varepsilon \langle \varphi, DE\,(u)\rangle - \langle \varphi^\varepsilon, DE\,(u)\rangle + \langle \varphi_\varepsilon, DE\,(u)\rangle\,,$$

hay

$$\langle \varphi, DE\,(u)\rangle \geq \frac{1}{\varepsilon}\Big[\,\langle \varphi^\varepsilon, DE\,(u)\rangle - \langle \varphi_\varepsilon, DE\,(u)\rangle\,\Big]. \tag{2.2}$$

Mặt khác do $\overline{u}\,(x)$ là nghiệm trên yếu của Bài toán (2.1), nên ta có

$$\langle \varphi^\varepsilon, DE(\overline{u})\rangle = \int\limits_\Omega (\nabla_\gamma \overline{u}, \nabla_\gamma \varphi^\varepsilon)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int\limits_\Omega f(X, \overline{u}(X))\varphi^\varepsilon \mathrm{d}X \geq 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, DE\,(u)\rangle &= \langle \varphi^\varepsilon, DE\,(\overline{u})\rangle + \langle \varphi^\varepsilon, DE\,(u) - DE\,(\overline{u})\rangle \qquad (2.3)\\
&\geq \langle \varphi^\varepsilon, DE\,(u) - DE\,(\overline{u})\rangle\\
= \int\limits_\Omega \Big\{ (\nabla_\gamma\,(u - \overline{u})\,, \nabla_\gamma \varphi^\varepsilon)_{\mathbb{R}^N} &- \Big[f\,(X, u(X)) - f\,(X, \overline{u}(X))\Big]\varphi^\varepsilon \Big\}\mathrm{d}X\\
&= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma\,(u - \overline{u})\,, \nabla_\gamma\,(u + \varepsilon\varphi - \overline{u})_{\mathbb{R}^N})\,\mathrm{d}X\\
&- \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f\,(X, u(X)) - f\,(X, \overline{u}(X))\Big]\Big(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\Big)\mathrm{d}X\\
&+ \int\limits_{\Omega^0} (\nabla_\gamma\,(u - \overline{u})\,, \nabla_\gamma\,(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}))_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X\\
&- \int\limits_{\Omega^0} \Big[f\,(X, u(X)) - f\,(X, \overline{u}(X))\Big]\Big(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\Big)\mathrm{d}X.
\end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta chứng minh

$$\int\limits_{\Omega^0} (\nabla_\gamma (u-\overline{u}), \nabla_\gamma (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X$$
$$-\int\limits_{\Omega^0} \Big[f(X,u(X)) - f(X,\overline{u}(X))\Big]\Big(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}\Big)\mathrm{d}X = 0.$$

Thật vậy, với mỗi $\alpha > 0$ đặt

$$\Omega^*_\alpha := \Big\{X \in \Omega^0 : |x_j| > \alpha, j = 1, 2, \ldots, N\Big\}.$$

Khi đó ta có

$$\int\limits_{\Omega^0} (\nabla_\gamma (u-\overline{u}), \nabla_\gamma (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X$$
$$-\int\limits_{\Omega^0} \Big[f(X,u(X)) - f(X,\overline{u}(X))\Big]\Big(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}\Big)\mathrm{d}X$$
$$= \int\limits_{\Omega^0} (\nabla_\gamma (u-\overline{u}), \nabla_\gamma (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X$$
$$= \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\Omega^*_\alpha} (\nabla_\gamma (u-\overline{u}), \nabla_\gamma (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X.$$

Theo giả thiết ta có $\gamma_j \in C(\bar{\Omega}^*_\alpha)$ và $\gamma_j(X) \neq 0$, với mọi $j = \overline{1,N}$, $X \in \bar{\Omega}^*_\alpha$, nên $|\gamma_j(x)| \geq C(\alpha) > 0$ với mọi $j = \overline{1,N}, X \in \Omega^*_\alpha$. Suy ra $u - \overline{u} \in H^1(\Omega^*_\alpha)$. Nên sử dụng Bổ đề 7.7 trong [30], ta có

$$\int\limits_{\Omega^*_\alpha} |\nabla_\gamma (u-\overline{u})| \mathrm{d}X = 0.$$

Do đó

$$\int\limits_{\Omega^*_\alpha} (\nabla_\gamma (u-\overline{u}), \nabla_\gamma (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X = 0, \ \forall\ \alpha > 0.$$

Khi đó cho $\alpha \to 0$ ta có

$$\int\limits_{\Omega^0} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma (u + \varepsilon\varphi - \overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X = 0.$$

Từ (2.3) ta có

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi^\varepsilon, DE(u)\rangle \geq \langle \varphi^\varepsilon, DE(u) - DE(\overline{u})\rangle \\
&= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma (u + \varepsilon\varphi - \overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X \\
&- \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u(X)) - f(X, \overline{u}(X))\Big]\Big(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\Big)\mathrm{d}X \\
&= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma (u - \overline{u}))_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u) - f(X, \overline{u})\Big](u - \overline{u})\,\mathrm{d}X \\
&+ \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u) - f(X, \overline{u})\Big]\varphi \mathrm{d}X \\
&\geq - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u) - f(X, \overline{u})\Big](u - \overline{u})\,\mathrm{d}X + \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X \\
&- \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u) - f(X, \overline{u})\Big]\varphi \mathrm{d}X.
\end{aligned}$$

Do $\mathrm{Vol}(\Omega^\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$, nên ta có

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla_\gamma (u - \overline{u}), \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big[f(X, u(X)) - f(X, \overline{u}(X))\Big]\varphi \mathrm{d}X = 0.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f(X, u(X)) - f(X, \overline{u}(X))|\,|u - \overline{u}|\,\mathrm{d}X \\
&\leq \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f(X, u(X)) - f(X, \overline{u}(X))|\,|\varphi| \mathrm{d}X,
\end{aligned}$$

suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left|f\left(X,u(X)\right)-f\left(X,\overline{u}(X)\right)\right|\left|u-\overline{u}\right|\mathrm{d}X=0. \tag{2.4}$$

Từ (2.4) ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big[f\left(X,u(X)\right)-f\left(X,\overline{u}(X)\right)\Big](u-\overline{u}\mathrm{d}X=0.$$

Do đó

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\langle\varphi^\varepsilon,DE\left(u\right)\right\rangle\geq 0. \tag{2.5}$$

Làm tương tự như trên, ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\langle\varphi_\varepsilon,DE\left(u\right)\right\rangle\leq 0. \tag{2.6}$$

Từ (2.2), (2.5) và (2.6) ta có

$$\left\langle\varphi,DE\left(u\right)\right\rangle\geq 0,\ \forall\ \varphi\in C_0^\infty\left(\Omega\right). \tag{2.7}$$

Mặt khác ta có nếu $\varphi\in C_0^\infty\left(\Omega\right)$ thì $-\varphi\in C_0^\infty\left(\Omega\right)$. Do vậy từ (2.7) ta có $\left\langle-\varphi,DE\left(u\right)\right\rangle\geq 0$, suy ra $\left\langle\varphi,DE\left(u\right)\right\rangle\leq 0$. Kết hợp với (2.7) ta có

$$\left\langle\varphi,DE\left(u\right)\right\rangle=0,\ \forall\varphi\in C_0^\infty\left(\Omega\right)\Rightarrow DE\left(u\right)=0.$$

Do không gian $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ là trù mật trong không gian $S^2_{\gamma,0}\left(\Omega\right)$, nên u là nghiệm yếu của Bài toán (2.1) thỏa mãn $\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$ hầu khắp nơi trong Ω.

Trong trường hợp tổng quát, chúng ta đặt $w=u-u_0$. Khi đó Bài toán (2.1) trở thành bài toán sau:

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma w+\widetilde{f}(X,w)&=0\quad\text{trong}\ \ \Omega,\\ w&=0\quad\text{trên}\ \ \partial\Omega,\end{aligned}$$

trong đó $\widetilde{f}(X,w) = \Delta_\gamma u_0 + f(X, w+u_0)$.
Từ giả thiết của hàm f ta có

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(X,\xi)| &\le |\Delta_\gamma u_0| + |f(X,\xi+u_0)| \le |\Delta_\gamma u_0| + a(X) + b|\xi+u_0|^p \\ &\le |\Delta_\gamma u_0| + a(X) + 2^p b\Big(|\xi|^p + |u_0|^p\Big) \\ &= \Big(|\Delta_\gamma u_0| + a(X) + 2^p b|u_0|^p\Big) + 2^p b|\xi|^p.\end{aligned}$$

Do $u_0 \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}), \gamma_j \in C(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathbb{R})$, và từ giả thiết i) của hàm γ ta có $\widetilde{a}(X) = |\Delta_\gamma u_0| + a(X) + 2^p b|u_0|^p \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Nên bài toán quay về trường hợp $u_0 = 0$. □

Hệ quả 2.1.6. *Giả sử các điều kiện của Định lí 2.1.5 là thỏa mãn. Khi đó tồn tại nghiệm yếu của Bài toán* (2.1) *trong không gian* $L^\infty(\Omega)$.

Hệ quả 2.1.7. *Giả sử* $f(X,\xi) = k(X)\xi|\xi|^{q-2} - \xi|\xi|^{p-2}$, *trong đó* $1 < k(X) \le C < \infty$, C *là hằng số và* $2 \le q < p < \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}$. *Khi đó bài toán*

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma u + f(X,u) &= 0 \quad \textit{trong} \ \ \Omega, \\ u &= u_0 \quad \textit{trên} \ \ \partial\Omega,\end{aligned}$$

trong đó u_0 *là hằng số và* $u_0 \ge 1$, *luôn có nghiệm yếu trong không gian* $L^\infty(\Omega)$.

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta chỉ ra $\underline{u} \equiv 1$ là nghiệm dưới yếu của bài toán. Thật vậy, ta có

$$\int_\Omega (\nabla_\gamma \underline{u}, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int_\Omega f(X, \underline{u}(X))\varphi \mathrm{d}X = -\int_\Omega (k(X)-1)\varphi \mathrm{d}X \le 0$$

với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \ge 0$.
Nên $\underline{u} \equiv 1$ là nghiệm dưới yếu của bài toán.

Mặt khác ta xét $\overline{u} \equiv C_0$, trong đó $C_0 \geq \max\{u_0, C^{\frac{1}{p-q}}\}$,

$$\int_\Omega (\nabla_\gamma \overline{u}, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int_\Omega f\left(X, \overline{u}(X)\right) \varphi \mathrm{d}X$$
$$= -C_0^{q-1} \int_\Omega \left(k\left(X\right) - C_0^{p-q}\right) \varphi \mathrm{d}X \geq 0,$$

với mọi $\varphi \in C_0^\infty\left(\Omega\right), \varphi \geq 0$.

Nên $\overline{u} \equiv C_0$ là nghiệm trên yếu của bài toán.

Từ Định lí 2.1.5 và Bổ đề 2.1.6 ta có điều phải chứng minh. □

Lưu ý 2.1.8. Hệ quả 2.1.7 có thể sử dụng phương pháp biến phân để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán, tuy nhiên việc sử dụng phương pháp biến phân không đánh giá được nghiệm như sử dụng phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới.

Ví dụ sau đây chỉ ra việc dùng phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới đối với phương trình elliptic suy biến trong trường hợp số mũ tới hạn.

Ví dụ 2.1.9. Hãy chỉ ra sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán sau

$$\begin{cases} \Delta_x u + |x|^{2k} \Delta_y u + |x|^{2k} \left(|u|^{\frac{N_k-2}{N_k+2}} + f(x,y)\right) = 0 \ \text{ trong } \ \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \ \text{ trên } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

ở đây Ω là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$, $x \in \mathbb{R}^{N_1}, y \in \mathbb{R}^{N_2}, k \in \mathbb{R}_+, \Omega \cap \{x = 0\} \neq \emptyset, N_k = N_1 + (1+k)N_2, f(x,y) \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), f(x,y) > 0$, với mọi $(x,y) \in \Omega$.

Đặt

$$\rho = \left(|x|^{2k+2} + (k+1)^2 |y|^2\right)^{\frac{1}{2k+2}}.$$

Khi đó ta có nếu $u(x,y) = u(\rho)$ thì

$$\Delta_x u + |x|^{2k} \Delta_y u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{N_k - 1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \frac{|x|^{2k}}{\rho^{2k}}.$$

Ta xét hàm

$$\overline{u} = C(1+\rho^2)^{-\frac{N_k-2}{2}},$$

ở đây

$$0 < C < [N_k(N_k-2)]^{\frac{N_k-2}{4}} \left(\max_{\overline{\Omega}} \rho^{2k} \right)^{-\frac{N_k-2}{4}}.$$

Khi đó ta có

$$\Delta_x \overline{u} + |x|^{2k} \Delta_y \overline{u} = -\frac{|x|^{2k}}{\rho^{2k}} C N_k (N_k-2)(1+\rho^2)^{-\frac{N_k+2}{2}}.$$

Đặt

$$\mathcal{D}(u) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{N_k-1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^{2k} |u|^{\frac{N_k+2}{N_k-2}} \right).$$

Khi đó

$$\mathcal{D}(\overline{u}) = -C(1+\rho^2)^{-\frac{N_k+2}{2}} \left(C^{\frac{4}{N_k-2}} \rho^{2k} - N_k(N_k-2) \right).$$

Mặt khác do

$$0 < C < [N_k(N_k-2)]^{\frac{N_k-2}{4}} \left(\max_{\overline{\Omega}} \rho^{2k} \right)^{-\frac{N_k-2}{4}},$$

nên $\mathcal{D}(\overline{u}) > 0$ với mọi $(x,y) \in \Omega$.

Nên nếu ta chọn hàm $f(x,y)$ thỏa mãn $f(x,y) \leq (\max_{\overline{\Omega}} \rho)^{-2k} \mathcal{D}(\overline{u})$ với mọi $(x,y) \in \Omega$. Khi đó $\overline{u}$ là nghiệm trên của phương trình (2.8) nên nó là nghiệm trên yếu.

Hiển nhiên từ điều kiện của hàm $f(x,y)$ ta có $\underline{u} = 0$ là nghiệm dưới yếu của phương trình (2.8).

Do đó từ Định lí 2.1.5 ta có phương trình (2.8) luôn có nghiệm yếu.

2.1.2 Định lí về sự tồn tại nghiệm yếu không âm

Trong mục này tác giả xét bài toán biên sau:

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u + \lambda u = u|u|^{p-2} & \text{trong } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{trong } \Omega, \\ u = 0 & \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

trong đó Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^N$ và λ, p là các hằng số cho trước.

Định lí 2.1.10. *Giả sử $\widetilde{N} > 2, p \in \left(2, \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}\right)$ và λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\gamma$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất. Khi đó, với mỗi $\lambda > -\lambda_1$ Bài toán (2.9) luôn có nghiệm yếu không tầm thường.*

Chứng minh. Chúng ta xét phiếm hàm $\widetilde{E}$ trong không gian $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ như sau

$$\widetilde{E}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(|\nabla_\gamma u|^2 + \lambda|u|^2\right) \mathrm{d}X - \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p \mathrm{d}X.$$

Đặt

$$E_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(|\nabla_\gamma u|^2 + \lambda|u|^2\right) \mathrm{d}X,$$

và

$$M_1 = \left\{ u \in S^2_{\gamma,0}(\Omega) : \int\limits_\Omega |u|^p \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Giả sử $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset M_1$ và $u_n \rightharpoonup u$ trong $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$. Do Mệnh đề 1.1.5, ta có $S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ với $2 \leq p < \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}$, nên $u_n \to u$ trong $L^p(\Omega)$. Mặt khác, từ $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1,\ \forall n$ nên $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ suy ra $u \in M_1$. Do đó

M_1 là tập đóng yếu trong không gian $S^2_{\gamma,0}(\Omega)$.
Bởi định nghĩa của λ_1 ta có

$$\frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{\Omega}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}X \geq \int\limits_{\Omega}|u|^2\mathrm{d}X.$$

Nếu $\lambda > 0$ ta có $E_1(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}$.
Nếu $\lambda \leq 0$ ta có

$$E_1(u) \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}.$$

Do đó

$$E_1(u) \geq \frac{1}{2}\min\left\{1, \left(1+\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\right\}\|u\|^2_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)}.$$

Mà $\lambda > -\lambda_1$ nên $E_1(u) \to \infty$ khi $\|u\|_{S^2_{\gamma,0}(\Omega)} \to \infty,\ u \in M_1$. Do đó E_1 là bức trên M_1.

Từ Mệnh đề 1.1.5 ta có $E_1(u)$ là nửa liên tục dưới yếu, nên theo Định lí 1.1.10 tồn tại $\underline{u} \in M_1$ là điểm cực tiểu của E_1 trên M_1. Mặt khác ta có $E_1(u) = E_1(|u|)$ với mọi u. Do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $\underline{u} \geq 0$.

Do E_1 là khả vi Fréchet nên ta có

$$\langle v, DE_1(u)\rangle = \int\limits_{\Omega}\Big((\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma v)_{\mathbb{R}^N} + \lambda uv\Big)\mathrm{d}X, \quad \forall v \in S^2_{\gamma,0}(\Omega).$$

Hơn nữa, ánh xạ

$$\begin{aligned} G : S^2_{\gamma,0}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto G(u) = \int\limits_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}X \end{aligned}$$

cũng khả vi Fréchet và

$$\langle v, DG(u)\rangle = p\int\limits_{\Omega}u|u|^{p-2}v\mathrm{d}X, \quad \forall v \in S^2_{\gamma,0}(\Omega).$$

Trong trường hợp điểm $u \in M_1$, ta có

$$\langle u, DG(u)\rangle = p\int\limits_{\Omega} |u|^p \mathrm{d}X = p \neq 0.$$

Theo quy tắc nhân Lagrange, tồn tại tham số $\mu \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\left\langle v, DE_1(\underline{u}) - \frac{\mu}{p}DG(\underline{u})\right\rangle = \int\limits_{\Omega}\left((\nabla_\gamma \underline{u}, \nabla_\gamma v)_{\mathbb{R}^N} + \lambda \underline{u}v - \mu\underline{u}|\underline{u}|^{p-2}v\right)\mathrm{d}X = 0$$

với mọi $v \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$. Cho $v = \underline{u}$, khi đó

$$\int\limits_{\Omega}\left((\nabla_\gamma \underline{u}, \nabla_\gamma \underline{u})_{\mathbb{R}^N} + \lambda|\underline{u}|^2 - \mu|\underline{u}|^p\right)\mathrm{d}X = 0.$$

Do đó

$$\mu = \mu\int\limits_{\Omega}|\underline{u}|^p\mathrm{d}X = 2E_1(\underline{u}) > 0.$$

Ta đặt $u^* = \mu^{\frac{1}{p-2}}\underline{u} \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$, khi đó $u^* = \mu^{\frac{1}{p-2}}\underline{u} \geq 0$ trong Ω và thỏa mãn

$$\left\langle v, D\widetilde{E}(u^*)\right\rangle = \mu^{\frac{1}{p-2}}\int\limits_{\Omega}\left((\nabla_\gamma \underline{u}, \nabla_\gamma v)_{\mathbb{R}^N} + \lambda \underline{u}v - \mu\underline{u}|\underline{u}|^{p-2}v\right)\mathrm{d}X = 0$$

với mọi $v \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$. Do đó u^* là nghiệm yếu của Bài toán (2.9). □

Lưu ý 2.1.11. Điều kiện $p \in \left(2, \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}\right)$ trong Định lí 2.1.10 là cần thiết và quan trọng, vì nếu $p = \frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}, \lambda = 0, \Delta_\gamma$ là toán tử elliptic suy biến mạnh và Ω là $\Delta_\gamma-$hình sao ứng với gốc tọa độ khi đó Bài toán (2.9) không có nghiệm không tầm thường (xem trong [65]).

Năm 1983, hai nhà toán học H. Brezis và L. Nirenberg trong [17] đã xét Bài toán (2.9) với $\gamma \equiv 1, p = \frac{2N}{N-2}$, khi đó hai nhà toán học đã khẳng định rằng

- Khi $N \geq 4$, Bài toán (2.9) có nghiệm dương nếu $0 < -\lambda < \lambda_1$, với λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử Laplace ứng với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất.
- Khi $N = 3$, Bài toán (2.9) có nghiệm dương nếu $\frac{1}{4}\lambda_1 < -\lambda < \lambda_1$ và Ω là hình cầu.

Kết quả mà chúng tôi đạt được trong mục này là cho trường hợp số mũ dưới tới hạn, việc chứng minh cho trường hợp tới hạn như trong trường hợp elliptic nêu trên vẫn còn là vấn đề mở.

2.2 Tính chính quy của nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến

Trong mục này tác giả xét bài toán biên sau:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + f(X, u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, với biên $\partial\Omega$ trơn.

Định nghĩa 2.2.1. Hàm $u \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của Bài toán (2.10) nếu đẳng thức

$$\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \varphi)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X - \int_\Omega f(X, u)\varphi \mathrm{d}X = 0$$

thỏa mãn với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Định lí 2.2.2. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ cùng với biên $\partial\Omega$ trơn. Giả sử $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(., \xi)$ đo được trên Ω với mọi $\xi \in \mathbb{R}$ cố định, $f(X, .)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với hầu khắp $X \in \Omega$ và $|f(X, \xi)| \leq a(X)\,(1 + |\xi|)\,, a(X) \in L^{\frac{\tilde{N}}{2}}_{loc}(\Omega)$. Giả sử $u \in S^2_{\gamma,loc}(\Omega)$ là nghiệm yếu của Bài toán (2.10). Khi đó $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ với mỗi $q < \infty$.*

Hơn nữa, nếu $u \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ và $a(X) \in L^{\frac{\tilde{N}}{2}}(\Omega)$ thì $u \in L^q(\Omega)$ với mỗi $q < \infty$.

Chứng minh. Lấy $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ với mỗi $s \geq 0, M_1 \geq 1$ sao cho $\varphi_s = u \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2$ thỏa mãn: $\mathrm{supp}\varphi_s \Subset \Omega,\ \varphi_s \in \mathrm{S}^2_{1,0}(\Omega)$.

Đặt

$$\Omega_{M_1}^{|u|^s} = \left\{X \in \Omega : |u(X)|^s \leq M_1\right\},$$
$$\mathcal{C}\Omega_{M_2}^a = \left\{X \in \Omega : |a(X)| > M_2\right\}.$$

Do $u(X)$ là nghiệm yếu của Bài toán (2.10) nên ta có

$$\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \varphi_s)_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}X = \int_\Omega f(X,u)\varphi_s \mathrm{d}X,$$

hay

$$\int_\Omega |\nabla_\gamma u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X + \frac{2s+1}{4}\int_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}} \left|\nabla_\gamma |u|^2\right|^2 |u|^{2s-2}\eta^2 \mathrm{d}X$$

$$= -2\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\mathrm{d}X + \int_\Omega f(X,u)\varphi_s \mathrm{d}X. \tag{2.11}$$

Do $|f(X,\xi)| \leq a(X)(1+|\xi|)$ nên

$$\begin{aligned}
& -2\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\mathrm{d}X + \int_\Omega f(X,u)\varphi_s \mathrm{d}X \\
\leq\ & -2\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\mathrm{d}X \\
& + \int_\Omega a(X)(1+|u|)|u| \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X \\
\leq\ & -2\int_\Omega (\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\mathrm{d}X
\end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega} a(X)\left(1+2|u|^2\right)\min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}-2(\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\} &\leq \frac{1}{2}|\nabla_\gamma u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \\ &+ 2u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}|\nabla_\gamma \eta|^2.\end{aligned}$$

Và do $M_1 \geq 1$ nên ta cũng có

$$\begin{aligned}& a(X)\left(1+2|u|^2\right)\min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \\ \leq\ & 3a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 + a(X)\eta^2.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}&-2\int_{\Omega}(\nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \eta)_{\mathbb{R}^N} u\eta \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\mathrm{d}X \\ &+\int_{\Omega} a(X)\left(1+2|u|^2\right)\min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_\gamma u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X + 2\int_{\Omega} u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}|\nabla_\gamma \eta|^2 \mathrm{d}X \\ &+3\int_{\Omega} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X + \int_{\Omega} a(X)\eta^2 \mathrm{d}X. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Mặt khác do $\frac{2s+1}{4} \geq \frac{s}{2}$ nên từ (2.11) và (2.12), ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_\gamma u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X + \frac{s}{2}\int_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}}\left|\nabla_\gamma |u|^2\right|^2 |u|^{2s-2}\eta^2 \mathrm{d}X \\ &\leq 2\int_{\Omega} u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}|\nabla_\gamma \eta|^2 \mathrm{d}X + \int_{\Omega} a(X)\eta^2 \mathrm{d}X \\ &+3\int_{\Omega} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X. \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Giả sử $u(X) \in L^{2s+2}_{\text{loc}}(\Omega)$ và do $a(X) \in L^{\frac{\widetilde{N}}{2}}_{\text{loc}}(\Omega)$ nên

$$\int\limits_{\Omega} a\left(X\right)\eta^2 \mathrm{d}X \leq C, \int\limits_{\Omega} u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\} |\nabla_\gamma \eta|^2 \mathrm{d}X \leq C. \tag{2.14}$$

Mà

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}} \left|\nabla_\gamma \left(|u|^{s+1}\eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \leq \int\limits_{\Omega} \left|\nabla_\gamma \left(u \min\left\{|u|^s, M_1\right\}\eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \\
&= \int\limits_{\Omega} \Big| \left(\min\left\{|u|^s, M_1\right\}\eta\right)\nabla_\gamma u + u\left(\min\left\{|u|^s, M_1\right\}\right)\nabla_\gamma \eta \\
&+ u\eta\nabla_\gamma \left(\min\left\{|u|^s, M_1\right\}\right)\Big|^2 \mathrm{d}X \leq 3\int\limits_{\Omega} \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2|\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}X \\
&+ 3\int\limits_{\Omega} u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\})|\nabla_\gamma \eta|^2 \mathrm{d}X + 3\int\limits_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}} u^2\eta^2|\nabla_\gamma |u|^s|^2 \mathrm{d}X \\
&= 3\int\limits_{\Omega} \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2|\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}X + 3\int\limits_{\Omega} u^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\})|\nabla_\gamma \eta|^2 \mathrm{d}X \\
&+ \frac{3}{4}s^2 \int\limits_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}} u^{2s-2}\eta^2|\nabla_\gamma |u|^2|^2 \mathrm{d}X.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Từ (2.13), (2.14) và (2.15), ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left|\nabla_\gamma \left(u \min\left\{|u|^s, M_1\right\}\eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \\
&\leq C + C\int\limits_{\Omega} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X \\
&\leq C + CM_2\int\limits_{\Omega} |u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X \\
&+ C\int\limits_{\mathcal{C}\Omega_{M_2}^a} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\}\eta^2 \mathrm{d}X
\end{aligned}$$

$$\leq C(1+CM_2) + C \int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\} \eta^2 \mathrm{d}X. \qquad (2.16)$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&C \int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} a(X)|u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\} \eta^2 \mathrm{d}X \\
&\leq C \left(\int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} |a(X)|^{\frac{\widetilde{N}}{2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{2}{\widetilde{N}}} \left(\int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} \left| |u|^2 \min\left\{|u|^{2s}, M_1^2\right\} \eta^2 \right|^{\frac{\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{\widetilde{N}-2}{\widetilde{N}}} \\
&\leq C \left(\int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} |a(X)|^{\frac{\widetilde{N}}{2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{2}{\widetilde{N}}} \left(\int\limits_{\Omega} |u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta|^{\frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{\widetilde{N}-2}{\widetilde{N}}} \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Do $u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ nên theo Mệnh đề 1.1.5, ta có

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta|^{\frac{2\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{\widetilde{N}-2}{\widetilde{N}}} \leq C_1 \int\limits_{\Omega} |\nabla_\gamma u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta|^2 \mathrm{d}X.$$

Kết hợp với (2.16) và (2.17), ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} |\nabla_\gamma \left(u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta\right)|^2 \mathrm{d}X \\
&\leq C(1+CM_2) + \varepsilon(M_2) \int\limits_{\Omega} |\nabla_\gamma u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta|^2 \mathrm{d}X, \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\varepsilon(M_2) = CC_1 \left(\int\limits_{\mathcal{C}\Omega^a_{M_2}} |a(X)|^{\frac{\widetilde{N}}{2}} \mathrm{d}X \right)^{\frac{2}{\widetilde{N}}}.$$

Do $\varepsilon(M_2) \to 0$ khi $M_2 \to \infty$, nên ta chọn M_2 đủ lớn sao cho $\varepsilon(M_2) = \frac{1}{2}$,

từ (2.18) ta có

$$\int_{\Omega} \left|\nabla_\gamma \left(u \min\left\{|u|^s, M_1\right\} \eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \leq 2C(1 + CM_2). \tag{2.19}$$

Từ (2.15) và (2.19), ta có

$$\int_{\Omega_{M_1}^{|u|^s}} \left|\nabla_\gamma \left(|u|^{s+1} \eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \leq 2C(1 + CM_2). \tag{2.20}$$

Cho $M_1 \to \infty$, từ (2.20) ta có

$$\int_{\Omega} \left|\nabla_\gamma \left(|u|^{s+1} \eta\right)\right|^2 \mathrm{d}X \leq 2C(1 + CM_2).$$

Nên suy ra

$$|u|^{s+1} \eta \in S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_\gamma}(\Omega).$$

Do đó $u \in L^{(s+1)2^*_\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Cứ tiếp tục quá trình như vậy với $s_0 = 0, s_i + 1 = (s_{i-1} + 1)\frac{\widetilde{N}}{\widetilde{N}-2}$, với $i \geq 1$ ta được $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ với $q < \infty$.

Nếu $u \in S^2_{\gamma,0}(\Omega)$ và $a(X) \in L^{\frac{\widetilde{N}}{2}}(\Omega)$ bằng cách lí luận tương tự với $\eta \equiv 1$ ta có $u \in L^q(\Omega)$ với mỗi $q < \infty$. □

Định lí 2.2.3. *Giả sử $f(X, \xi) = f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện*

1) *$f(\xi) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$ trong đó $\alpha \in (0, 1]$.*

2) *$|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^m)$ với C là hằng số dương và $1 < m < \frac{\widetilde{N}+2}{\widetilde{N}-2}$.*

Khi đó nếu $u(X)$ là nghiệm yếu của Bài toán (2.10) thì $u(X) \in L^p(\Omega)$ với mỗi $1 \leq p < \infty$.

Chứng minh. Do u là nghiệm yếu của Bài toán (2.10) nên $u(X)$ cũng là nghiệm yếu của bài toán:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + a(X)(1 + |u|) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases}$$

trong đó $a(X) = \frac{f(u(X))}{1+|u(X)|}$.
Do $|f(\xi)| \leq C(1+|\xi|^m) \Rightarrow |a(X)| \leq C(1+|u(X)|^{m-1})$.
Mà $1 < m < \frac{\widetilde{N}+2}{\widetilde{N}-2}$ nên $0 < m-1 < \frac{4}{\widetilde{N}-2}$ và $u(X) \in S^2_{\gamma,0}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_\gamma}(\Omega)$, do vậy

$$\int\limits_{\Omega} \left(1+|u(X)|^{m-1}\right)^{\frac{\widetilde{N}}{2}} \mathrm{d}X < \infty.$$

Suy ra $a(X) \in L^{\frac{\widetilde{N}}{2}}(\Omega)$, nên theo Định lí 2.2.2 ta có $u(X) \in L^p(\Omega)$ với mỗi $1 \leq p < \infty$. □

Từ Định lí 2.2.2 và Định lí 9 trong [69], ta có:

Hệ quả 2.2.4. *Giả sử $f(\xi)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lí 2.2.2 và*

1) *$f(\xi) = o(\xi)$ khi $\xi \to 0$.*

2) *Tồn tại hằng số A và $\mu \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn $F(\xi) \leq \mu f(\xi)\xi$ với mọi $|\xi| \geq A$, trong đó $F(\xi) = \int\limits_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.*

Khi đó Bài toán (2.10) luôn có nghiệm yếu không tầm thường thuộc không gian $L^p(\Omega)$ với mỗi $1 \leq p < \infty$.

Lưu ý 2.2.5. Kết quả về tính chính quy mà chúng tôi đạt được trong mục này mới chỉ dừng lại ở lớp không gian $L^p(\Omega)$, việc chứng minh tính chính quy của nghiệm có đạo hàm yếu như trong trường hợp không suy biến, tức là $\gamma \equiv 1$, mà các kết quả đã đạt được trong công trình [18] vẫn còn là vấn đề mở.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này chúng tôi đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ và nghiên cứu tính chính quy của nghiệm. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu dựa vào nghiệm trên yếu và nghiệm dưới yếu của bài toán (Định lí 2.1.5).

2) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm không âm của bài toán trong một trường hợp của hàm phi tuyến (Định lí 2.1.10).

3) Chứng minh được tính chính quy của nghiệm (Định lí 2.2.2).

Kết quả của Chương 2 là sự mở rộng và phát triển các kết quả tương ứng của bài toán biên elliptic trong [17,60] đối với toán tử Δ_γ, với phương pháp tương tự như đối với toán tử elliptic và kỹ thuật đã được điều chỉnh cho phù hợp với toán tử suy biến.

Chương 3

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH TRONG MIỀN BỊ CHẶN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trên miền bị chặn Ω của không gian $\mathbb{R}^N$, với số hạng phi tuyến tăng trưởng kiểu đa thức. Chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán, sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ và chứng minh được số chiều fractal của tập hút toàn cục là hữu hạn. Chương này gồm ba phần:

- Phần thứ nhất: Trình bày sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân.

- Phần thứ hai: Trình bày sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

- Phần thứ ba: Trình bày tính bị chặn của số chiều fractal của tập hút toàn cục.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

3.1.1 Đặt bài toán

Trong chương này tác giả nghiên cứu bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t = P_{k_1,k_2}u + f(X,u), \quad X \in \Omega, t > 0, \\ u(X,t) = 0, \quad X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X,0) = u_0(X), \quad u_t(X,0) = u_1(X), \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó β là hằng số dương, Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} = \mathbb{R}^N, (N_1, N_2, N_3 \geq 1, X = (x,y,z)), \Omega \cap \{x = 0\} \neq \emptyset$, $\Omega \cap \{y = 0\} \neq \emptyset$ và $P_{k_1,k_2}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2k_1}|y|^{2k_2}\Delta_z u, k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, |x|^{2k_1} = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2\right)^{k_1}, |y|^{2k_2} = \left(\sum_{j=1}^{N_2} y_j^2\right)^{k_2}.$$

Chúng ta giả sử $f(X,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(.,\xi)$ đo được trên Ω với mọi $\xi \in \mathbb{R}$ cố định, $f(X,.)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với mỗi $X \in \Omega$ và

$$|f(X,\xi_1) - f(X,\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|\Big(g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho\Big), \tag{3.2}$$

với $0 \leq \rho \leq \frac{2}{N_{k_1,k_2}-2}, N_{k_1,k_2} = N_1 + N_2 + (1 + k_1 + k_2)N_3 > 2$,

$$f(X,0) = h(X) \in L^2(\Omega), \tag{3.3}$$

$$F(X,\xi) = \int_0^\xi f(X,\tau)d\tau \leq g_1(X) + g_2(X)\xi^2, \tag{3.4}$$

$$f(X,\xi)\xi \leq g_3(X) + g_4(X)\xi^2, \tag{3.5}$$

trong đó $\rho, C > 0$ là các hằng số, và các hàm thỏa mãn

$$g_1(X), g_3(X) \in L^1(\Omega),\ g_2(X) \in L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega),\ g_4(X) \in L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega),$$

$$\|g_2\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{2C^2(2^*_{k_1,k_2},\Omega)},\ \|g_4\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{C^2(2^*_{k_1,k_2},\Omega)},$$

ở đây $2^*_{k_1,k_2} = \dfrac{2N_{k_1,k_2}}{N_{k_1,k_2}-2}$, $C(2^*_{k_1,k_2},\Omega)$ là hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức Sobolev

$$\|u\|_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)} \leq C(2^*_{k_1,k_2},\Omega)\,\|u\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)},$$

và $g(X)$ là hàm không âm thỏa mãn, $g(X) \in L^{N_{k_1,k_2}}(\Omega)$ nếu $\rho = 0$, và $g(X) \in L^{\frac{2^*_{k_1,k_2}}{\rho}}(\Omega)$ nếu $\rho \neq 0$.

Đặt

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ P_{k_1,k_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^*(U)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v(X) + f(X,u(X)) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó Bài toán (3.1) trở thành bài toán sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = AU + f^*(U),\ t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Chúng ta đặt $H = S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Khi đó H là không gian Hilbert cùng với tích vô hướng sau

$$(U,\overline{U})_H = (\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix}) = (\nabla_{k_1,k_2}u, \nabla_{k_1,k_2}\overline{u})_{L^2(\Omega)} + (v,\overline{v})_{L^2(\Omega)}.$$

Miền xác định của toán tử A là $D(A)$ xác định bởi

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u, v \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega); P_{k_1,k_2}u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

3.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Bổ đề 3.1.1. *Toán tử liên hợp của toán tử A là toán tử A^* xác định như sau*

$$A^* = -\begin{pmatrix} 0 & Id \\ P_{k_1,k_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

với

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega); P_{k_1,k_2}\chi \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của toán tử liên hợp ta có để $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A^*)$ và $A^* \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ khi và chỉ khi

$$(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ P_{k_1,k_2}u \end{pmatrix}),\ \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A),$$

$$\Leftrightarrow (\nabla_{k_1,k_2}p, \nabla_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)} + (q, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla_{k_1,k_2}\chi, \nabla_{k_1,k_2}v)_{L^2(\Omega)}$$

$$+(\psi, P_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega), P_{k_1,k_2}u \in L^2(\Omega),\ \forall v \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$$

khi và chỉ khi

$$(\nabla_{k_1,k_2}p, \nabla_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)} = (\psi, P_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.7)$$
$$\forall u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega), P_{k_1,k_2}u \in L^2(\Omega),$$

và

$$(q, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla_{k_1,k_2}\chi, \nabla_{k_1,k_2}v)_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega). \qquad (3.8)$$

Từ công thức Gauss-Green, ta có

$$(\nabla_{k_1,k_2}p, \nabla_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)} = -(p, P_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)},$$
$$\forall u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega), P_{k_1,k_2}u \in L^2(\Omega),$$

và từ (3.7), ta có

$$(p + \psi, P_{k_1,k_2}u)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega), P_{k_1,k_2}u \in L^2(\Omega).$$

Do đó $p = -\psi$. Nhưng (3.8) đúng khi và chỉ khi $P_{k_1,k_2}\chi \in L^2(\Omega)$ và $q = -P_{k_1,k_2}\chi$.

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử $f(X,\xi)$ thỏa mãn các điều kiện* (3.2), (3.3). *Khi đó*

a) Ánh xạ Nemytskii

$$\begin{aligned} f : S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto f(X,u(X)) \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$.

b) Ánh xạ

$$\begin{aligned} f^* : H &\longrightarrow H \\ U &\longmapsto f^*(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v + f(X,u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của H.

Chứng minh. a) Từ (3.2), ta có

$$|f(X,u)|^2 \le C\left(g^2(X)|u|^2 + |u|^{2(\rho+1)} + |h(X)|^2\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(X,u)|^2 \mathrm{d}X &\le C\left\{\int_\Omega \left(g^2(X)|u|^2 + |u|^{2(1+\rho)}\right)\mathrm{d}X + \int_\Omega |h(X)|^2\mathrm{d}X\right\} \\ &\le C\Big(\|g\|^2_{L^{N_{k_1,k_2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)} + \|u\|^{2(1+\rho)}_{L^{2(1+\rho)}(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$.

Giả sử $u, v \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$, $R > 0$ và $\|u\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} \le R$, $\|v\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} \le R$.

Khi đó ta có

$$\int\limits_{\Omega} |f(X,u)-f(X,v)|^2 \mathrm{d}X \leq C \int\limits_{\Omega} |u-v|^2 \Big(g^2(X)+|u|^{2\rho}+|v|^{2\rho}\Big)\mathrm{d}X$$

$$\leq C \int\limits_{\Omega} g^2(X)|u-v|^2 \mathrm{d}X + C \int\limits_{\Omega} |u-v|^2|u|^{2\rho}\mathrm{d}X + C \int\limits_{\Omega} |u-v|^2|v|^{2\rho}\mathrm{d}X.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\int\limits_{\Omega} g^2(X)|u-v|^2 \mathrm{d}X \leq \|g\|^2_{L^{N_{k_1,k_2}}(\Omega)} \|u-v\|^2_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)},$$

$$\int\limits_{\Omega} |u-v|^2|u|^{2\rho}\mathrm{d}X \leq \|u\|^{2\rho}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} \|u-v\|^2_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)},$$

$$\int\limits_{\Omega} |u-v|^2|v|^{2\rho}\mathrm{d}X \leq \|v\|^{2\rho}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} \|u-v\|^2_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}.$$

Do không gian $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$ là nhúng liên tục vào không gian $L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)$ và $1 < 2(\rho+1) \leq 2^*_{k_1,k_2}$, nên ta có

$$\|f(X,u)-f(X,v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|u-v\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} \times \Big(1+\|u\|^{2\rho}_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|v\|^{2\rho}_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}\Big),$$

hay

$$\|f(X,u)-f(X,v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(R) \|u-v\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}.$$

b) Giả sử $R > 0, U, \overline{U} \in H$ và $\|U\|_H \leq R, \left\|\overline{U}\right\|_H \leq R$. Chúng ta có

$$f^*(U) - f^*(\overline{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\overline{v} - \beta v + f(X,u) - f(X,\overline{u}) \end{pmatrix}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}\left\|f^*(U)-f^*(\overline{U})\right\|_H^2 &= \|\beta\overline{v}-\beta v+f(X,u)-f(X,\overline{u})\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\le 2\|\beta\overline{v}-\beta v\|_{L^2(\Omega)}^2+2\|f(X,u)-f(X,\overline{u})\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\le 2C\|u-\overline{u}\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}^2\left(1+\|u\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}^{2\rho}+\|\overline{u}\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}^{2\rho}\right)\\ &\quad+2\beta^2\|\overline{v}-v\|_{L^2(\Omega)}^2\le C_1(R)\left\|U-\overline{U}\right\|_H^2.\end{aligned}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Từ Bổ đề 3.1.1 theo Định lí Stone ta có A sinh ra một C_0- nửa nhóm e^{At} trên H.

Định nghĩa 3.1.3 ([59]). Giả sử $T>0, T\in\mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U:[0,T)\to H$ được gọi là nghiệm tích phân của Bài toán (3.1) nếu nó là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(t)=e^{At}U_0+\int_0^t e^{A(t-s)}f^*(U(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T).$$

Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0,T)$ cùng với U_t và AU thuộc không gian $L^1_{loc}(0,T,H)$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=AU+f^*(U),\ \text{hầu khắp nơi trên } (0,T),\ U(0)=U_0, U(t)\in D(A)$$

khi đó U được gọi là nghiệm mạnh của Bài toán (3.1).

Sử dụng Bổ đề 3.1.2 và chứng minh tương tự như Định lí 46.1 (p. 235), Định lí 46.2 (p. 236) trong [59] ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1.4. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện* (3.2), (3.3). *Khi đó với mỗi $R>0$ tồn tại $T=T(R)>0$ đủ nhỏ sao cho với*

$U_0 \in H, \|U_0\|_H \leq R$, Bài toán (3.1) tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân $U \in C([0,T];H)$.

Hơn nữa, nếu $U_0 \in D(A)$ thì U là nghiệm mạnh của Bài toán (3.1).

Từ (3.2) và (3.3), ta có

$$|F(X,u)| \leq C\left(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |f(X,0)||u|\right).$$

Suy ra

$$\int_\Omega |F(X,u)|\mathrm{d}X \leq C\int_\Omega \left(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u|\right)\mathrm{d}X$$
$$\leq C\left(\|g\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)} + \|u\|^{2+\rho}_{L^{2+\rho}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\right) < +\infty,$$

với mọi $u \in S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$.

Vì thế ta định nghĩa hàm Lyapunov để tìm nghiệm trong Mệnh đề 3.1.4 là

$$\Phi(U) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} - \int_\Omega F(X,u(X))\mathrm{d}X. \tag{3.9}$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (3.1) với u_t và tích phân trên Ω, ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla_{k_1,k_2}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega F(X,u(X))\mathrm{d}X\right) = -\beta\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Do đó

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(U(t)) = -\beta\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Định lí 3.1.5. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.4) và $U_0 \in H$. Khi đó Bài toán (3.6) tồn tại nghiệm toàn cục duy nhất $U \in C([0,\infty);H)$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \to S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên H.*

Chứng minh. Giả sử nghiệm $U(t)$ được xác định trên khoảng cực đại $[0, T_{\max})$.

Từ (3.2), ta có

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(X, u(X))\mathrm{d}X &\le \int_\Omega \left(g_1(X) + g_2(X)u^2\right)\mathrm{d}X \\ &\le \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)} \\ &\le \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega)\, \|g_2\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Từ (3.10), ta có nghiệm $U(t)$ tồn tại trên $[0, T_{\max})$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned}&\Phi(U(0)) \ge \Phi(U(t)) \ge \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+\frac{1}{2}\|\nabla_{k_1,k_2} u\|^2_{L^2(\Omega)} - C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega)\, \|g_2\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} - \|g_1\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Suy ra với mọi t thuộc $[0, T_{\max})$ ta có

$$\|U\|^2_H \le \frac{2\left(\Phi(U(0)) + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}\right)}{\min\left\{1, 1 - 2C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega)\, \|g_2\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)}\right\}} := \widetilde{C}. \tag{3.11}$$

Từ (3.11) ta có $T_{\max} = +\infty$. Thật vậy, giả sử ngược lại $T_{\max} < +\infty$ khi đó từ (3.11) ta có $\left\|U\left(T_{\max} - \frac{1}{n}\right)\right\|^2_H \le \widetilde{C}$ với $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \ge \frac{1}{T_{\max}}$. Từ Mệnh đề 3.1.4 tồn tại hằng số $T^*(\widetilde{C})$ (độc lập với n) sao cho Bài toán (3.6) có nghiệm duy nhất trên $\left[T_{\max} - \frac{1}{n}, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C})\right)$, tức là $U(t)$ là nghiệm của bài toán trên $\left[0, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C})\right)$. Nếu $n > \frac{1}{T^*(\widetilde{C})}$ khi đó $T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C}) > T_{\max}$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của $T_{\max}$.

Như vậy với $U_0 \in H$ thì Bài toán (3.6) có nghiệm duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$.

Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.

Giả sử U, V là hai nghiệm tích phân của Bài toán (3.6) với điều kiện ban đầu tương ứng $U_0, V_0 \in H$. Đặt $W = U - V$ ta có

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(U(s))\mathrm{d}s.$$

$$V(t) = e^{At}V_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(V(s))\mathrm{d}s.$$

Áp dụng Định lí 1.2.13 ta có

$$\begin{aligned} ||W(t)||_H &= \left\| e^{At}W_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(f^*(U(s)) - f^*(V(s)))\mathrm{d}s \right\|_H \\ &\leq \left\| e^{At}W_0 \right\|_H + \int_0^t \left\| e^{A(t-s)}(f^*(U(s)) - f^*(V(s))) \right\|_H \mathrm{d}s \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| W_0 \right\|_H + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \left\| f^*(U(s)) - f^*(V(s)) \right\|_H \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất Lipschitz của hàm f^* và bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân ta có sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu. □

3.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Từ Định lí 3.1.5, chúng ta định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : H \to H$ như sau

$$S(t)U_0 := U(t),$$

trong đó $U(t)$ là nghiệm duy nhất của Bài toán (3.6), với điều kiện ban đầu U_0. Trong chứng minh của Định lí 3.1.5, ta có với mọi $R > 0$, $U_0 \in H$

cùng với $\|U_0\|_H \leq R$, tồn tại hằng số $M > 0$ chỉ phụ thuộc vào R thỏa mãn $\|U(t)\|_H \leq M$ với mọi $t > 0$. Nói cách khác, quỹ đạo của các tập bị chặn là bị chặn.

Định lí 3.2.1. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện* (3.2)–(3.5). *Khi đó nửa nhóm $S(t)$ có một tập hút toàn cục liên thông compact $\mathcal{A} = W^u(E)$ trong H.*

Chứng minh. Đầu tiên từ (3.10) và chứng minh của Định lí 3.1.5, ta có $\gamma^+(B)$ là bị chặn với mỗi tập bị chặn B trong H, và phiếm hàm Φ định nghĩa bởi (3.9) là hàm Lyapunov ngặt. Ký hiệu

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in H : P_{k_1,k_2} u + f(X, u) = 0 \right\},$$

khi đó E là tập các điểm cân bằng của $S(t)$. Nếu $U \in E$, ta có

$$\|\nabla_{k_1,k_2} u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(X, u) u \mathrm{d}X = 0.$$

Do đó

$$\|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} = \int_\Omega f(X, u) u \mathrm{d}X \leq \int_\Omega \Big(g_3(X) + g_4(X) u^2 \Big) \mathrm{d}X.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Sobolev, ta có

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(X, u) u \mathrm{d}X &\leq \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + \|g_4\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)} \\ &\leq \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\|u\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} \leq \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)}},$$

do đó

$$\|U\|^2_H \leq \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2^*_{k_1,k_2}, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_{k_1,k_2}}{2}}(\Omega)}},$$

tức là E là bị chặn trong H. Do đó để chứng minh tồn tại tập hút toàn cục, chúng ta chỉ cần chứng minh $S(t)$ là compact tiệm cận trong H. Xét phiếm hàm

$$I(U(t)) = \Phi(U(t)) + \frac{\beta}{2}\int_\Omega uu_t \mathrm{d}X,$$
$$H_0(u(t)) = \beta\int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(X,u)u - F(X,u)\right)\mathrm{d}X.$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (3.1) với u và tích phân trên Ω, ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega uu_t \mathrm{d}X = \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla_{k_1,k_2}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta\int_\Omega uu_t\mathrm{d}X + \int_\Omega f(X,u(X))u\mathrm{d}X.$$

Suy ra

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(U(t)) = -\beta I(U(t)) + H_0(u) \text{ hay } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{\beta t}I(U(t))] = \mathrm{e}^{\beta t}H_0(u),$$

nên với mỗi $T > 0$, ta có

$$I(U(T)) = \mathrm{e}^{-\beta T}I(U(0)) + \int_0^T \mathrm{e}^{\beta(t-T)}H_0(u(t))\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

Ta giả sử $U_n(t) = S(t)U_n(0)$ với dãy $\{U_n(0)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H, và $t_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$. Từ $\Phi(U(0)) \geq \Phi(U(t))$ ta có dãy $\{\Phi(U_n(t_n))\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H, kết hợp với (3.11) ta có $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H. Do đó dãy $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ có một dãy con hội tụ yếu, không mất tính tổng quát chúng ta giả sử $U_n(t_n) \rightharpoonup U$ trong H khi $n \to \infty$, và ta giả sử $U_n(t_n - T) \rightharpoonup U_T$ trong H, với $U, U_T \in H$. Với mỗi $t \geq 0$ dãy $\{U_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ có một dãy con hội tụ yếu, nên ta giả sử $\overline{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in H$ sao cho

$$U_n(t_n + t - T) \rightharpoonup \overline{U}(t) \text{ trong } H,$$

ở đó $\overline{U}(0) = U_T, \overline{U}(T) = U$.

Áp dụng (3.12) với $U_n(t_n + t - T) = \begin{pmatrix} u_n(t_n + t - T) \\ u_{nt}(t_n + t - T) \end{pmatrix}$, ta có

$$I(U_n(t_n)) = \mathrm{e}^{-\beta T} I(U_n(t_n - T)) + \int_0^T \mathrm{e}^{\beta(t-T)} H_0(u_n(t_n + t - T))\mathrm{d}t.$$

Chúng ta chứng minh

$$H_0(u_n(t_n + t - T)) \to H_0(u(t)).$$

Thật vậy, từ $U_n(t_n+t-T) \rightharpoonup \overline{U}(t)$ trong H, ta có $u_n(t_n+t-T) \rightharpoonup u(t)$ trong $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$ mà $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ nên $u_n(t_n + t - T) \to u(t)$ trong $L^2(\Omega)$.

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và từ (3.2), ta có

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |f(X, u_n)u_n - f(X, u)u|\mathrm{d}X \\
\leq\ & \int_\Omega |f(X, u_n)u_n - f(X, u)u_n|\mathrm{d}X + \int_\Omega |f(X, u)u_n - f(X, u)u|\mathrm{d}X \\
=\ & \int_\Omega |f(X, u_n) - f(X, u)||u_n|\mathrm{d}X + \int_\Omega |u_n - u||f(X, u)|\mathrm{d}X \\
\leq\ & C\int_\Omega (g(X) + |u_n|^\rho + |u|^\rho)\,|u_n||u_n - u|\mathrm{d}X + \int_\Omega |u_n - u||f(X, u)|\mathrm{d}X \\
\leq\ & C\,\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \left(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|u_n\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} + \|u\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}\right) \|u_n\|_{L^{r_2}(\Omega)} \\
& + \quad \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}\,\|f(X, u)\|_{L^2(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

ở đây $r_1 = \dfrac{2N_{k_1,k_2}}{(N_{k_1,k_2} - 2)\rho}$ nếu $\rho \neq 0$, $r_1 = N_{k_1,k_2}$ nếu $\rho = 0$ và $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác ta có $\{u_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$ và $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_{k_1,k_2}}$, nên ta có

$$\int_\Omega f(X, u_n(t_n+t-T))u_n(t_n+t-T)\mathrm{d}X \to \int_\Omega f(X, u(t))u(t)\mathrm{d}X \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ (3.2), ta có

$$\Big|F(X,u_n)-F(X,u)\Big| = \left|\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}F(X,u+\theta(u_n-u))}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$= \left|\int\limits_0^1 F'_\theta(X,u+\theta(u_n-u))(u_n-u)\mathrm{d}\theta\right| \le \int\limits_0^1 \Big|f(X,u+\theta(u_n-u))\Big||u_n-u|\mathrm{d}\theta$$

$$\le \int\limits_0^1 \Big\{C\Big(g(X)\Big|u+\theta(u_n-u)\Big|+\Big|(u+\theta(u_n-u))^{\rho+1}\Big|\Big)+|f(X,0)|\Big\}|u_n-u|\mathrm{d}\theta$$

$$\le C\Big(g(X)|u|+g(X)|u_n|+|u|^{\rho+1}+|u_n|^{\rho+1}\Big)|u_n-u|+|h(X)||u_n-u|.$$

Do đó

$$\int\limits_\Omega \Big|F(X,u_n)-F(X,u)\Big|\mathrm{d}X \le \int\limits_\Omega |h(X)||u_n-u|\mathrm{d}X$$
$$+\int\limits_\Omega \left(C\Big(g(X)|u|+g(X)|u_n|+|u|^{\rho+1}+|u_n|^{\rho+1}\Big)|u_n-u|\right)\mathrm{d}X.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\int\limits_\Omega \Big|F(X,u_n)-F(X,u)\Big|\mathrm{d}X \le C\Big\{\ \|u\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}+\|u_n\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}$$
$$+\|h(X)\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^{N_{k_1,k_2}}(\Omega)}\left(\|u\|_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)}+\|u_n\|_{L^{2^*_{k_1,k_2}}(\Omega)}\right)\Big\}\,\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mặt khác ta có $\{u_n(t_n+t-T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)$ và $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$, nên ta có

$$\int_\Omega F(X,u_n(t_n+t-T))\mathrm{d}X \to \int_\Omega F(X,u(t))\mathrm{d}X \text{ khi } n\to\infty.$$

Do đó

$$H_0(u_n(t_n+t-T)) \to H_0(u(t)) \text{ khi } n\to\infty.$$

Áp dụng (3.12) với $\overline{U}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \mathrm{e}^{\beta(t-T)}H_0(u_n(t_n+t-T))\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{e}^{\beta(t-T)}H_0(u(t))\mathrm{d}t$$
$$= I(\overline{U}(T)) - \mathrm{e}^{-\beta T}I(\overline{U}(0)).$$

Mặt khác dãy $\{U_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H, tồn tại $C > 0$ sao cho $I(U_n) \leq C$ với mọi $t \geq 0$. Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} I(U_n(t_n)) \leq C\mathrm{e}^{-\beta T} + I(\overline{U}(T)) - \mathrm{e}^{-\beta T}I(\overline{U}(0)).$$

Do I là nửa liên tục dưới yếu, nên ta cho $T \to \infty$, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} I(U_n(t_n)) \leq I(U) \leq \liminf_{n\to\infty} I(U_n(t_n))$$

do đó $I(U_n(t_n)) \to I(U)$. Nên $\|U_n(t_n)\|_H \to \|U\|_H$ mà H là không gian Hilbert do vậy $U_n(t_n) \to U$ trong H. Do đó $S(t)$ là compact tiệm cận. Áp dụng Định lí 1.2.10, ta có điều phải chứng minh. □

Định lí 3.2.2. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện* (3.2)–(3.5). *Khi đó nửa nhóm $S(t)$ xác định bởi Bài toán 3.6, có tập hút cực tiểu toàn cục $\mathcal{M}$ trong không gian H, tức là, với mỗi $(u_0,u_1) \in H$ nghiệm tương ứng $(u(t),u_t(t)) = S(t)(u_0,u_1)$ dần tới tập E của các điểm cân bằng trong H khi $t \to +\infty$.*

Chứng minh. Vì $S(t)$ là hệ gradient nên tập hút cực tiểu toàn cục chính là tập các điểm cân bằng E. Thật vậy, từ chứng minh Định lí 3.2.1 chúng ta thấy tập các điểm cân bằng E bị chặn, khi đó $S(t)$ có tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$. Nếu tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ tồn tại thì nó chứa một tập hút cực tiểu $\mathcal{M}$ trong H. Do vậy từ Định lí 3.2.1 suy ra sự tồn tại của tập hút toàn cục cực tiểu $\mathcal{M}$. Bây giờ ta chứng minh $\mathcal{M} = E$. Rõ ràng $E \subset \mathcal{M}$.

Ta còn phải chứng minh $\mathcal{M} \subset E$. Vì $\mathcal{M} = \bigcup_{U \in H} \omega(U)$, nên chỉ cần chỉ ra nếu $V \in \omega(U)$ thì $S(t)V = V$, $\omega(U) \in E$. Từ định nghĩa của $\omega(U)$ thì tồn tại một dãy t_n sao cho $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ và $S(t_n)U = U(t_n) \to V$ trong H khi $n \to \infty$. Do hàm Lyapunov bị chặn dưới nên

$$\Phi(V) = \liminf_{t\to\infty} \Phi(S(t)U) = \Phi(U(t))$$

với $t > 0$. Tức Φ là hằng trên $\omega(U)$. Mặt khác nếu $V \in \omega(U)$ thì $S(t)V \in \omega(U)$. Vậy $\Phi(S(t)V)$ là không phụ thuộc vào t. Do vậy $\left\|\dfrac{\mathrm{d}(S(t)V)}{\mathrm{d}t}\right\|_H = 0$. Từ đó $S(t)V$ là không phụ thuộc vào t. Suy ra $V \in E$, hay $\mathcal{M} \subset E$. Do đó $\mathcal{M} = E$. □

Ví dụ 3.2.3. Ta sẽ chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán biên với giá trị ban đầu sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial t} = P_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} u - |u|u \text{ với } (x,y,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,t) = 0 \text{ với } (x,y,z) \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = u_1(x,y,z) \text{ với } (x,y,z) \in \Omega, \end{cases}$$

trong đó β là hằng số dương, Ω là miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^3$, $\Omega \cap \{x = 0\} \neq \emptyset, \Omega \cap \{y = 0\} \neq \emptyset, u_0(x,y,z) \in S^2_{(1/4,3/4),0}(\Omega), u_1(x,y,z) \in L^2(\Omega)$ và

$$P_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{|x|}\sqrt{|y|^3}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi kiểm tra các điều kiện (3.2)–(3.5) đối với hàm $f(x,y,z,u) = -u|u|$ trong điều kiện (3.2) là $\rho = 1, C = 1, g(X) = 1$ và $N_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} = 4, \frac{2}{N_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}-2} = 1$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= -u|u| + v|v| = -(|u|u - |u|v) - (|u|v - |v|v) \\ &= -|u|(u - v) - v(|u| - |v|). \end{aligned}$$

Mà

$$|u| = |(u-v)+v| \leq |u-v| + |v|, \text{ suy ra } |u| - |v| \leq |u-v|.$$

Tương tự

$$|v| \leq |v-u| + |u|, \text{ suy ra } |v| - |u| \leq |v-u|.$$

Do đó $||u| - |v|| \leq |u-v|$.

Vậy

$$\begin{aligned} & |f(u) - f(v)| = ||u|(u-v) + v(|u| - |v|)| \\ \leq\ & |u||u-v| + |v|(|u| - |v|) \leq |u||u-v| + |v|(|u-v|) \\ =\ & |u-v|(|u| + |v|) \leq |u-v|(|u| + |v| + 1), \quad \text{với } \rho = 1. \end{aligned}$$

Vậy hàm $f(x,y,z,u) = -u|u|$ thỏa mãn điều kiện (3.2).

Vì $f(x,y,z,0) = 0 \in L^2(\Omega)$, nên hàm $f(x,y,z,u) = -u|u|$ thỏa mãn điều kiện (3.3).

Vì $F(x,y,z,u) = -\dfrac{|u|^3}{3} \leq C^* u^2$, với $0 < C^* < \frac{1}{2C^2(2^*_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}},\Omega)}$, nên hàm $f(x,y,z,u) = -u|u|$ thỏa mãn điều kiện (3.4) trong đó $g_1(x,y,z) = 0, g_2(x,y,z) = C^*$.

Vì $f(x,y,z,u)u = -|u|^3 \leq C^* u^2$, nên hàm $f(x,y,z,u) = -u|u|$ thỏa mãn điều kiện (3.5) với $g_3(x,y,z) = 0, g_4(x,y,z) = C^*$.

Vậy hàm $f(x,y,z,u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5). Áp dụng Định lí 3.2.2, ta có Ví dụ 3.2.3 tồn tại một tập hút toàn cục liên thông compact trong $S^2_{(1/4,3/4),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ đối với nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Ví dụ 3.2.3.

3.3 Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục

Trong mục này chúng tôi chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ sinh bởi Bài toán (3.1) là hữu hạn. Phương pháp mà chúng tôi sử dụng ở đây là phương pháp $\ell-$ quỹ đạo.

Đặt

$$H_\ell := \left\{ u \in L^2(0,\ell; S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)), u_t \in L^2(0,\ell; L^2(\Omega)) \right\},$$

$$\mathcal{A}_\ell := \left\{ u \in H_\ell; u \text{ là nghiệm của (3.1) trên } [0,\ell], \text{ và } \begin{pmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\},$$

trong đó ℓ là một hằng số cố định dương. Chuẩn trên H_ℓ được định nghĩa như sau

$$\|u\|^2_{H_\ell} := \|u\|^2_{L^2(0,\ell;S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^2(0,\ell;L^2(\Omega))},$$

khi đó H_ℓ là không gian Hilbert và phiếm hàm thời gian

$$E(u(.,s)) := \left\| \begin{pmatrix} u(.,s) \\ u_t(.,s) \end{pmatrix} \right\|^2_H = \|\nabla_{k_1,k_2} u(.,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(.,s)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Khi đó rõ ràng

$$\|u\|^2_{H_\ell} = \int_0^\ell E(u(s))\mathrm{d}s.$$

Định nghĩa

$$e : \mathcal{A}_\ell \to H \quad \text{với} \quad e(u) := \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix},$$

$$L_t : \mathcal{A}_\ell \to H_\ell \quad \text{với} \quad (L_t(u))(s) := u_1(t+s), \quad s \in [0,\ell],$$

trong đó u_1 là nghiệm duy nhất của Bài toán (3.1) trên $[0,\ell+t]$ thỏa mãn $u_1|_{[0,\ell]} = u$.

Bổ đề 3.3.1. *Các khẳng định sau là đúng*

a) L_t *là liên tục Lipschitz trên* $\mathcal{A}_\ell$ *với mỗi* $t \geq 0$.

b) $L_t(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}_\ell$ *với mọi* $t \geq 0$,

c) $e(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}$,

d) e *là liên tục Lipschitz trên* $\mathcal{A}_\ell$.

Chứng minh. Giả sử $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, $V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ và $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix} = S(t)U_0$, $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v_t(t) \end{pmatrix} = S(t)V_0$.

Đặt $w(t) = u(t) - v(t)$. Khi đó $w(t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} w_{tt} + \beta w_t = P_{k_1,k_2} w + f(X,u) - f(X,v) \text{ trong } \Omega \times (0,\infty), \\ w(X,t) = 0 \text{ với } X \in \partial\Omega, t > 0, \\ w(X,0) = u_0 - v_0, w_t(X,0) = u_1 - v_1. \end{cases}$$

Nhân phương trình đầu với w_t và tích phân trên Ω, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|w\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \beta \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \Big(f(X,u) - f(X,v)\Big)\Big(u_t - v_t\Big)\mathrm{d}X, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Từ Bổ đề 3.1.2 và áp dụng bất đẳng thức Hölder ta có tồn tại $C_1(\mathcal{A}) > 0$, thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \Big(f(X,u) - f(X,v)\Big)\Big(u_t - v_t\Big)\mathrm{d}X \right| \\ &\leq \Big(\int_\Omega |f(X,u) - f(X,v)|^2 \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |u_t - v_t|^2 \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1(\mathcal{A}) \|u - v\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \beta\,\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C_1(\mathcal{A})\,\|u-v\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}\,\|u_t-v_t\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Do $\beta > 0$ nên ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq 2C_1(\mathcal{A})\,\|u-v\|_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)}\,\|u_t-v_t\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C_1(\mathcal{A})\left(\|w\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\|w\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{e}^{C_1(\mathcal{A})t}\left(\|w(0)\|^2_{S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega)} + \|w_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

hay

$$\|S(t)(U_0-V_0)\|^2_H \leq \mathrm{e}^{C_1(\mathcal{A})t}\,\|U_0-V_0\|^2_H\,. \tag{3.14}$$

a) Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó theo định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ tồn tại v_1, v_2 là nghiệm của Bài toán 3.1 thỏa mãn

$$u_1 = v_1|_{[0,\ell]}, L_t u_1(s) = v_1(s+t), u_2 = v_2|_{[0,\ell]}, L_t u_2(s) = v_2(s+t), s \in [0,\ell].$$

Đặt $w := v_1 - v_2$, chúng ta lấy $s \in (0,\ell)$ và sử dụng (3.14), ta có

$$E(w(t+s)) = E\left(S(t)\begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_{1t}(s)\end{pmatrix} - S(t)\begin{pmatrix} v_2(s) \\ v_{2t}(s)\end{pmatrix}\right) \leq CE(w(s)).$$

Tích phân trên $(0,\ell)$ cùng với biến s, ta có

$$\int_0^\ell E(w(t+s))\mathrm{d}s \leq C\int_0^\ell E(w(s))\mathrm{d}s,$$

từ đó suy ra

$$\|L_t u_1 - L_t u_2\|^2_{H_\ell} \leq C\,\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell}\,.$$

Do đó L_t là liên tục Lipschitz trên $\mathcal{A}_\ell$.

b) Với mỗi $u \in L_t(\mathcal{A}_\ell)$ tồn tại $u_1 \in \mathcal{A}_\ell$ thỏa mãn $u(s) = (L_t u_1)(s) = u_2(t+s)$, u_2 là nghiệm của Bài toán (3.1) trên $[0, \ell + t]$ thỏa mãn $u_2|_{[0,\ell]} = u_1$. Mặt khác do $u_1 \in \mathcal{A}_\ell$ nên ta có $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_{1t}(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, do tính chất của tập hút toàn cục nên $\begin{pmatrix} u_2(\xi) \\ u_{2t}(\xi) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ với mỗi $\xi \in [0, \ell + t]$. Nên ta có $u \in \mathcal{A}_\ell$, do đó $L_t(\mathcal{A}_\ell) \subset \mathcal{A}_\ell$.

Ngược lại, với mỗi $u \in \mathcal{A}_\ell$. Từ Định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ và tính chất của tập hút toàn cục, ta có $\begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ với mỗi $s \in [0, \ell]$. Do $S(t)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, nên tồn tại $\begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$S(t) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} u_1(t+s) \\ u_{1t}(t+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix}.$$

Và u_1 là nghiệm của (3.1) trên $[t, \ell + t]$, suy ra tồn tại u_2 là nghiệm của Bài toán (3.1) trên $[0, \ell + t]$ sao cho $u_2|_{[t,t+\ell]} = u_1$. Theo định nghĩa của L_t ta có $(L_t(u_2))(s) = u_1(t+s) = u(s)$. Do vậy $\mathcal{A}_\ell \subset L_t(\mathcal{A}_\ell)$. Nên ta có $\mathcal{A}_\ell = L_t(\mathcal{A}_\ell)$.

c) Với mỗi $U \in e(\mathcal{A}_\ell)$, tồn tại $u \in \mathcal{A}_\ell$ sao cho $U = e(u) = \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix}$. Từ định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ và tính chất của tập hút toàn cục ta có, $\begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. Suy ra $e(\mathcal{A}_\ell) \subset \mathcal{A}$.

Ngược lại, với mỗi $U \in \mathcal{A}$. Do $S(\ell)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, nên tồn tại $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ thỏa mãn $S(\ell)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = U$. Với mỗi $t \in [0, \ell]$, đặt

$$S(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có $u(t) \in \mathcal{A}_\ell$, và $e(u(t)) = \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix} = U$. Suy ra $\mathcal{A} \subset e(\mathcal{A}_\ell)$.

Do đó ta có $\mathcal{A} = e(\mathcal{A}_\ell)$.

d) Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó ta có $e(u_\ell) = \begin{pmatrix} u_1(\ell) \\ u_{1t}(\ell) \end{pmatrix}, e(u_2) = \begin{pmatrix} u_2(\ell) \\ u_{2t}(\ell) \end{pmatrix}$. Với $s \in [0, \ell]$, ta đặt $w(s) := u_1(s) - u_2(s)$. Sử dụng (3.14), ta có

$$E(w(\ell)) = E\left(S(\ell - s)\begin{pmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ u_{1t}(s) - u_{2t}(s) \end{pmatrix}\right) \leq CE(w(s)).$$

Tích phân trên $(0, \ell)$ với biến s, ta có

$$\int_0^\ell E(w(\ell))\mathrm{d}s \leq C \int_0^\ell E(w(s))\mathrm{d}s$$

hay

$$\|e(u_1) - e(u_2)\|_H^2 \leq C_1 \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh

□

Từ c) và d) của Bổ đề 3.3.1, ta có

$$\dim_{fr}^H \mathcal{A} \leq \dim_{fr}^{H_\ell} \mathcal{A}_\ell.$$

Bổ đề 3.3.2. *Giả sử $r \in [2, 2^*_{k_1,k_2})$ và $\mu > 0$. Khi đó tồn tại $K_\mu > 0$ và một phép chiếu trực chuẩn hữu hạn chiều P trong không gian H_ℓ thỏa mãn với mỗi $w \in H_\ell$, ta có*

$$\int_0^\ell \|w(s)\|^2_{L^r(\Omega)} \, \mathrm{d}s \le \mu \|w\|^2_{H_\ell} + K_\mu \|P(w)\|^2_{H_\ell}. \tag{3.15}$$

Chứng minh. Do $r \in [2, 2^*_{k_1,k_2})$ nên ta có

$$S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

áp dụng Bổ đề Aubin-Lions, ta có

$$H_\ell \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0, \ell; L^r(\Omega)).$$

Để chứng minh bổ đề trên chúng ta sử dụng phương pháp phản chứng, ta giả sử (3.15) là sai. Khi đó tồn tại $\mu_0 > 0$ và một dãy phép chiếu trực chuẩn P_n trong không gian H_ℓ thỏa mãn $P_n \to I$ hội tụ mạnh trong H_ℓ và

$$\int_0^\ell \|w_n(s)\|^2_{L^r(\Omega)} \, \mathrm{d}s > \mu_0 + n \|P_n(w_n)\|^2_{H_\ell}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.16}$$

với dãy $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset H_\ell$ cùng với tính chất $\|w_n\|_{H_\ell} = 1$.

Từ (3.16) ta có $\|P_n(w_n)\|_{H_\ell} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Từ $\|w_n\|_{H_\ell} = 1$, nên tồn tại một dãy con của dãy $\{w_n\}$ hội tụ yếu đến w trong H_ℓ, do vậy không mất tính tổng quát, ta giả sử $w_n \rightharpoonup w$ trong H_ℓ với $w \in H_\ell$. Do đó

$$P_n(w_n) \rightharpoonup 0, \text{ và } P_n(w - w_n) \rightharpoonup 0 \text{ trong } H_\ell,$$

suy ra

$$P_n w = P_n(w - w_n) + P_n(w_n) \rightharpoonup 0 \text{ trong } H_\ell,$$

nên $w = 0$. Do vậy $\int\limits_0^\ell \|w_n(s)\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}s \to 0$ khi $n \to +\infty$, mâu thuẫn với (3.16). Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.3.3. *Giả sử* $0 < \rho < \dfrac{2}{N_{k_1,k_2} - 2}$. *Khi đó với* ℓ *đủ lớn,* L_ℓ *có tính chất GSP trên* $\mathcal{A}_\ell$.

Chứng minh. Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó tồn tại nghiệm v_1, v_2 của (3.1) thỏa mãn

$$u_1 = v_1|_{[0,\ell]}, L_\ell u_1 = v_1|_{[\ell,2\ell]}, u_2 = v_2|_{[0,\ell]}, L_\ell u_2 = v_2|_{[\ell,2\ell]}.$$

Đặt $w := v_1 - v_2$, ta có

$$w_{tt} + \beta w_t = P_{k_1,k_2} w + f(X, v_1) - f(X, v_2). \tag{3.17}$$

Nhân phương trình (3.17) với w_t và tích phân trên Ω, ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \Big(w_{tt} + \beta w_t\Big) w_t \mathrm{d}X = \int\limits_\Omega \Big(P_{k_1,k_2} w + f(X, v_1) - f(X, v_2)\Big) w_t \mathrm{d}X \\
&\quad \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(w)\mathrm{d}X + \beta \int\limits_\Omega |w_t|^2 \mathrm{d}X = \int\limits_\Omega \Big(f(X, v_1) - f(X, v_2)\Big) w_t \mathrm{d}X,
\end{aligned}$$

từ giả thiết (3.2) ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(w) + \beta \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \int\limits_\Omega \Big(g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho\Big) |w||w_t| \mathrm{d}X.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \Big(g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho\Big) |w||w_t| \mathrm{d}X \\
&\qquad \le C\Big(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} + \|v_2\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} \Big) \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)} \|w_t\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

trong đó $r_1 = \dfrac{2N_{k_1,k_2}}{(N_{k_1,k_2}-2)\rho}$ và $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$.

Từ $\rho < \dfrac{2}{N_{k_1,k_2}-2}$ suy ra $r_2 < 2^*_{k_1,k_2}$, nên ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(w) + \beta \left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|w\right\|_{L^{r_2}(\Omega)} \left\|w_t\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(w) + \beta \left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left\|w\right\|^2_{L^{r_2}(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Suy ra

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(w) + \beta \left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C_1 \left\|w\right\|^2_{L^{r_2}(\Omega)}. \tag{3.18}$$

Ta cố định $\tau \in (0,\ell)$ và tích phân (3.18) trên đoạn $(\tau, 2\ell)$, ta có

$$E(w(2\ell)) + \beta \int\limits_{\tau}^{2\ell} \left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t \leq C_2 \int\limits_{\tau}^{2\ell} \left\|w\right\|^2_{L^{r_2}(\Omega)} \mathrm{d}t + E(w(\tau)). \tag{3.19}$$

Tiếp theo ta nhân phương trình (3.17) với w và tích phân trên Ω, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \Big(w_{tt}w + \beta w_t\Big) w \mathrm{d}X &= \int\limits_{\Omega} wP_{k_1,k_2}w\mathrm{d}X + \int\limits_{\Omega}\Big(f(X,v_1) - f(X,v_2)\Big)w\mathrm{d}X \\ &\leq \int\limits_{\Omega} wP_{k_1,k_2}w\mathrm{d}X + C\int\limits_{\Omega}\Big(g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho\Big)|w|^2\mathrm{d}X.\end{aligned}$$

Mặt khác do

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} w_{tt}w\mathrm{d}X &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} w_t w\mathrm{d}X - \left\|w_t\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ \int\limits_{\Omega} wP_{k_1,k_2}w\mathrm{d}X &= -\left\|\nabla_{k_1,k_2}w\right\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_t w \mathrm{d}X\right| \leq \|w_t\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\int\limits_{\Omega} \Big(g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho\Big)|w|^2 \mathrm{d}X$$

$$\leq C\Big(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} + \|v_2\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}\Big)\|w\|^2_{L^{2r_3}(\Omega)} \leq C_3\|w\|^2_{L^{2r_3}(\Omega)},$$

trong đó

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = 1.$$

Do vậy

$$\|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w_t w \mathrm{d}X \tag{3.20}$$
$$+ \quad C_4\|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)}, \quad \text{ở đây } r_4 := \max\{2, 2r_3\}.$$

Tích phân (3.20) trên $(\tau, 2\ell)$ ta có

$$\int\limits_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t \leq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t - \int\limits_{\tau}^{2\ell}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} w_t w \mathrm{d}X\right)\mathrm{d}t$$
$$+ \quad C_4\int\limits_{\tau}^{2\ell} \|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)} \mathrm{d}t.$$

Do

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\tau}^{2\ell}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} w_t w \mathrm{d}X\right)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int\limits_{\Omega} w_t(2\ell)w(2\ell)\mathrm{d}X - \int\limits_{\Omega} w_t(\tau)w(\tau)\mathrm{d}X\right| \\
&\leq \left|\int\limits_{\Omega} w_t(2\ell)w(2\ell)\mathrm{d}X\right| + \left|\int\limits_{\Omega} w_t(\tau)w(\tau)\mathrm{d}X\right| \\
&\leq C_5\Big(E(w(2\ell)) + E(w(\tau))\Big),
\end{aligned}$$

nên ta có

$$\int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t \le \Big(1+\frac{\beta}{2}\Big) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t$$

$$+C_4 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)} \,\mathrm{d}t + C_5 \left(E(w(2\ell)) + E(w(\tau))\right). \tag{3.21}$$

Nhân hai vế của (3.21) với $\epsilon \in (0,1)$, sau đó cộng với (3.19), ta có

$$\epsilon \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \Big(\beta - \epsilon\Big(1+\frac{\beta}{2}\Big)\Big) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t$$

$$+ \Big(1 - C_5\epsilon\Big) E(w(2\ell)) \le C_6 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|^2_{L^r(\Omega)} \,\mathrm{d}t + (1+C_5\epsilon) E(w(\tau)),$$

trong đó $r := \max\{r_2; r_4\}$. Ta chọn $\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2C_5}, \frac{\beta}{2+\beta}\right\}$ khi đó ta có

$$\Big(1 - C_5\epsilon\Big) E(w(2\ell)) + \Big(\beta - \epsilon\Big(1+\frac{\beta}{2}\Big)\Big) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t$$

$$+ \ \epsilon \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t \ge \eta \left(\int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_{k_1,k_2} w\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t \right)$$

$$= \eta \int_{\tau}^{2\ell} E(w) \mathrm{d}t \ge \eta \int_{\ell}^{2\ell} E(w) \mathrm{d}t,$$

$$C_6 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|^2_{L^r(\Omega)} \,\mathrm{d}t + (1+C_5\epsilon) E(w(\tau)) \le C_6 \int_{0}^{2\ell} \|w\|^2_{L^r(\Omega)} \,\mathrm{d}t + 2E(w(\tau)),$$

trong đó $\eta := \min\left\{\epsilon, \beta - \epsilon(1+\frac{\beta}{2})\right\}$. Do vậy

$$\eta \int_{\ell}^{2\ell} E(w) \mathrm{d}t \le C_6 \int_{0}^{2\ell} \|w\|^2_{L^r(\Omega)} \,\mathrm{d}t + 2E(w(\tau)).$$

Tích phân trên $(0,\ell)$ của bất đẳng thức trên ta có

$$\eta\ell\int_{\ell}^{2\ell} E(w)\mathrm{d}t \le C_6\ell\int_{0}^{2\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + 2\int_{0}^{\ell} E(w(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

suy ra

$$\int_{\ell}^{2\ell} E(w)\mathrm{d}t \le \frac{C_6}{\eta}\int_{0}^{2\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\eta\ell}\int_{0}^{\ell} E(w(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Do đó

$$\|Lu_1 - Lu_2\|^2_{H_\ell} \le \frac{C_6}{\eta}\int_{0}^{2\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\eta\ell}\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell}, \tag{3.22}$$

trong đó $L := L_\ell$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_{\ell}^{2\ell}\|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{\ell}\|u_1-u_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\ell}\|Lu_1-Lu_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ta chọn $\ell = \frac{128}{\eta}$ từ Bổ đề 3.3.2 và (3.22), ta có

$$\begin{aligned}&\|Lu_1 - Lu_2\|^2_{H_\ell} \le \frac{C_6}{\eta}\left(\int_{0}^{\ell}\|u_1-u_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\ell}\|Lu_1-Lu_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right)\\ &+\frac{1}{64}\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell} \le \frac{C_6}{\eta}(\mu\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell} + K_\mu\|P(u_1-u_2)\|^2_{H_\ell}\\ &+\mu\|Lu_1-Lu_2\|^2_{H_\ell} + K_\mu\|P(Lu_1-Lu_2)\|^2_{H_\ell}) + \frac{1}{64}\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell},\end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|Lu_1-Lu_2\|^2_{H_\ell} + \left(\frac{1}{2}-\frac{C_6\mu}{\eta}\right)\|Lu_1-Lu_2\|^2_{H_\ell}\\ \le\ &\frac{C_6K_\mu}{\eta}\left(\|P(u_1-u_2)\|^2_{H_\ell} + \|P(Lu_1-Lu_2)\|^2_{H_\ell}\right)\\ +\ &\left(\frac{1}{64}+\frac{C_6\mu}{\eta}\right)\|u_1-u_2\|^2_{H_\ell}.\end{aligned}$$

Chọn $\mu = \frac{\eta}{192C_6}$, ta có

$$\frac{1}{2}\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 + \frac{95}{192}\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2$$
$$\leq K_0\left(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2\right) + \frac{1}{48}\|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2,$$

ở đây $K_0 = \frac{C_6 K_\mu}{\eta}$. Suy ra, hoặc

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 \leq \frac{192K_0}{95}\left(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2\right),$$

hoặc

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 < \frac{1}{24}\|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2,$$

do đó bổ đề được chứng minh. □

Kết hợp các Bổ đề 3.3.1, Bổ đề 1.2.14 và Bổ đề 3.3.3, ta có

Định lí 3.3.4. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện* (3.2)–(3.5) *với* $0 < \rho < \dfrac{2}{N_{k_1,k_2} - 2}$. *Khi đó số chiều fractal của tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ là hữu hạn.*

Lưu ý 3.3.5. Nếu $\rho = 0$, $g(X) \in L^{N_{k_1,k_2}+\epsilon}(\Omega)$, với ϵ là số dương đủ nhỏ khi đó Định lí 3.3.4 vẫn đúng.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trên miền bị chặn Ω trong không gian $\mathbb{R}^N$, với số hạng phi tuyến tăng trưởng kiểu đa thức. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân của bài toán (Định lí 3.1.5).

2) Chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục liên thông compact của bài toán (Định lí 3.2.1).

3) Chứng minh được số chiều fractal của tập hút toàn cục của bài toán là hữu hạn (Định lí 3.3.4).

Các kết quả của Chương 3 là sự mở rộng cho các kết quả đã đạt được đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic trong [10,11,13,46] cho toán tử elliptic suy biến mạnh và hàm phi tuyến. Phương pháp chúng tôi sử dụng ở đây là phương pháp phương trình năng lượng và phương pháp $\ell-$quỹ đạo.

Chương 4

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN

Trong Chương 3, chúng tôi đã nghiên cứu bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trên miền bị chặn Ω trong không gian $\mathbb{R}^N$. Khi đó nửa nhóm $S(t), t > 0$, sinh bởi bài toán là một nửa nhóm (phi tuyến) compact, tức là, $S(t)$ là toán tử compact với mỗi $t > 0$ (điều này suy ra từ tính compact của phép nhúng $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$). Trong chương này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu bài toán trên toàn không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$. Khi đó các phép nhúng cần thiết không còn compact, do đó $S(t)$ không còn là nửa nhóm compact nữa và điều đó gây ra những khó khăn lớn khi nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục. Để khắc phục điều đó chúng tôi đã đưa ra khoảng cách suy biến tương ứng và sử dụng phương pháp ước lượng đuôi nghiệm để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm sinh bởi bài toán trong không gian $S^2_k(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Chương này gồm hai phần:

- Phần thứ nhất: Trình bày sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân.

- Phần thứ hai: Trình bày sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S^2_k(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân

4.1.1 Đặt bài toán

Trong chương này tác giả nghiên cứu bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = G_k u + f(X, u), t > 0, \\ X = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} := \mathbb{R}^N, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó β là hằng số dương, $u_0(X) \in S_k^2(\mathbb{R}^N), u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ và

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, |x|^{2k} = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2\right)^k, G_k u = \Delta_x u + |x|^{2k} \Delta_y u, k \in \mathbb{R}_+.$$

Chúng ta giả sử $f(X, \xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$|f(X, \xi_1) - f(X, \xi_2)| \leq C_1 |\xi_1 - \xi_2| \left(g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho\right) \tag{4.2}$$

với $0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{N_k - 2}, N_k = N_1 + (1 + k)N_2 > 2, 2_k^* = \dfrac{2N_k}{N_k - 2},$

$$f(X, 0) = h(X) \in L^2(\mathbb{R}^N), \tag{4.3}$$

$$F(X, \xi) \geq C_2 f(X, \xi)\xi + g_1(X), \quad \text{với mọi } X \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X)) \mathrm{d}X \leq 0, \quad \text{với mọi } u(X) \in S_k^2(\mathbb{R}^N), \tag{4.5}$$

ở đây ρ, C_1, C_2 là các hằng số dương, và $g(X) \in L^{N_k}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N_k}{2}}(\mathbb{R}^N)$, $g_1(X) \in L^1(\mathbb{R}^N), F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau$.

Đặt

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k - Id & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^*(U)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v(X) + f(X, u(X)) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

Khi đó Bài toán (4.1) trở thành bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathbb{A}U + f^*(U), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Đặt $\mathcal{H} = S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(U, \overline{U})_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} \right) = (u, \overline{u})_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} + (v, \overline{v})_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Miền xác định của toán tử $\mathbb{A}$ là $D(\mathbb{A})$ xác định bởi

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u, v \in S_k^2(\mathbb{R}^N); G_k u - u \in L^2(\mathbb{R}^N)) \right\}.$$

4.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Từ định nghĩa của toán tử $\mathbb{A}$ và không gian $\mathcal{H}$, ta có

Bổ đề 4.1.1. *Toán tử liên hợp của toán tử $\mathbb{A}$ là toán tử $\mathbb{A}^*$ xác định như sau*

$$\mathbb{A}^* = -\begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k - Id & 0 \end{pmatrix},$$

với

$$D(\mathbb{A}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in S_k^2(\mathbb{R}^N); G_k \chi - \chi \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Do $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện (4.2), (4.3) nên ta có bổ đề sau

Bổ đề 4.1.2. *Giả sử $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện* (4.2), (4.3). *Khi đó*

a) Ánh xạ Nemytskii

$$\begin{aligned} \widehat{f} : S_k^2(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto \widehat{f}(u)(X) := f(X, u(X)) \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $S_k^2(\mathbb{R}^N)$.

b) Ánh xạ

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ U &\longmapsto f^*(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v + f(X, u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $\mathcal{H}$.

Từ Bổ đề 4.1.1 theo Định lí Stone ta có $\mathbb{A}$ sinh ra một C_0- nửa nhóm $e^{\mathbb{A}t}$ trên $\mathcal{H}$.

Định nghĩa 4.1.3 ([59]). Giả sử $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U : [0, T) \to \mathcal{H}$ được gọi là nghiệm tích phân của Bài toán (4.6) nếu nó là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(t) = e^{\mathbb{A}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-s)} f^*(U(s))\mathrm{d}s, \ t \in [0, T).$$

Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0, T)$ cùng với U_t và $\mathbb{A}U$ thuộc không gian $L^1_{loc}(0, T; \mathcal{H})$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathbb{A}U + f^*(U) \text{ hầu khắp nơi trên } (0, T), \ U(0) = U_0, U(t) \in D(\mathbb{A})$$

khi đó U được gọi là nghiệm mạnh của Bài toán (4.6).

Sử dụng Bổ đề 4.1.2 và chứng minh tương tự như Định lí 46.1 (p.235), Định lí 46.2 (p. 236) trong [59] ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 4.1.4. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện* (4.2)–(4.5). *Khi đó với mỗi $R > 0$ tồn tại $T = T(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho với $U_0 \in \mathcal{H}, \|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq R$, Bài toán* (4.1) *tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân $U \in C([0,T);\mathcal{H})$.*

Hơn nữa, nếu $U_0 \in D(\mathbb{A})$ thì U là nghiệm mạnh của Bài toán (4.1).

Từ (4.2), (4.3) ta có

$$|F(X,\xi)| \leq C\Big(g(X)|\xi|^2 + |\xi|^{2+\rho} + |f(X,0)||\xi|\Big).$$

Suy ra

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(X,u)|\mathrm{d}X \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \Big(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u|\Big)\mathrm{d}X$$
$$\leq C\Big(\|g\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^2_{L^{2^*_k}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^{2+\rho}_{L^{2+\rho}(\mathbb{R}^N)} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\Big) < +\infty,$$

với mọi $u \in S^2_1(\mathbb{R}^N)$.

Định lí 4.1.5. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện* (4.2)–(4.5) *và $U_0 \in \mathcal{H}$. Khi đó Bài toán* (4.6) *có nghiệm duy nhất toàn cục $U \in C([0,\infty);\mathcal{H})$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \to S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Sử dụng Mệnh đề 4.1.4 và lí luận như trong Định lí 3.1.5 ta có điều phải chứng minh. □

4.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^2_k(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$

Từ Định lí 4.1.5, chúng ta định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ như sau

$$S(t)U_0 := U(t),$$

trong đó $U(t)$ là nghiệm duy nhất của Bài toán (4.6), với điều kiện ban đầu U_0.

Ta chứng minh sự tồn tại tập hấp thụ của $S(t)$ trong không gian $\mathcal{H}$.

Bổ đề 4.2.1. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện* (4.2)–(4.5). *Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Bài toán* (4.1) *có một tập hấp thụ bị chặn trong $\mathcal{H}$, nghĩa là, tồn tại một hằng số dương M sao cho với mọi tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong $\mathcal{H}$ tồn tại số $T = T(\mathcal{B})$ sao cho với mọi $t \geq T, U_0 \in \mathcal{B}$, ta có*

$$\|u\|^2_{S^2_k(\mathbb{R}^N)} + \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq M. \tag{4.7}$$

Chứng minh. Giả sử $U(t)$ là nghiệm của Bài toán (4.6) cùng với điều kiện ban đầu U_0 khi đó $\overline{u} = u_t + \delta u$ thỏa mãn phương trình:

$$\overline{u}_t + (\beta - \delta)\,\overline{u} + \left(\delta^2 - \beta\delta + 1\right) u = G_k u + f(X,u). \tag{4.8}$$

Đặt

$$\mathcal{A}(\overline{u},u) = \|\overline{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(\delta^2 - \delta\beta + 1\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ta $\delta \in (0,1)$ đủ nhỏ sao cho

$$\beta - 2\delta > 0, \quad \delta^2 - \delta\beta + 1 > 0,$$

và tồn tại $C_1 > 0, C_2 > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &C_1\left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\ &\leq \mathcal{A}(\overline{u},u) \leq C_2\left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nhân phương trình (4.8) với $\overline{u}$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{A}(\overline{u},u)\right) = -\Big(\beta - \delta\Big)\|\overline{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \delta\Big(\delta^2 - \delta\beta + 1\Big)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &-\delta\|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u)\overline{u}\mathrm{d}X = \Big(2\delta - \beta\Big)\|\overline{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u)u_t\mathrm{d}X \\ &+\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u)u\mathrm{d}X - \delta\mathcal{A}(\overline{u},u). \end{aligned}$$

Từ (4.4), ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{A}(\overline{u},u)-2\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u)\mathrm{d}X\right)\leq-\delta\mathcal{A}(\overline{u},u)+\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)u\mathrm{d}X$$
$$\leq-\delta\mathcal{A}(\overline{u},u)+\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big(F(X,u)-g_1(X)\Big)\mathrm{d}X.$$

Từ (4.5), ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{A}(\overline{u},u)-2\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u)\mathrm{d}X\right)$$
$$\leq-\mu\left(\mathcal{A}(\overline{u},u)-2\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u)\mathrm{d}X\right)+C_3,$$

trong đó

$$\mu=\ \min\left\{\delta,\frac{\delta}{2C_2}\right\}>0,\quad C_3=-\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}g_1(X)\mathrm{d}X.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\mathcal{A}(\overline{u},u)-2\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u)\mathrm{d}X$$
$$\leq e^{-2\mu t}\left(\mathcal{A}(\overline{u}_0,u_0)-2\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u_0)\mathrm{d}X-\frac{C_3}{\mu}\right)+\frac{C_3}{\mu},\quad\forall t\geq 0.$$

Khi đó ta có

$$\|u\|^2_{S^2_k(\mathbb{R}^N)}+\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq Ce^{-2\mu t}\mathcal{T}(u_0,u_1)+\frac{C_5}{\mu},\tag{4.10}$$

ở đây $\mathcal{T}(u_0,u_1)=\|u_0\|^2_{S^2_k(\mathbb{R}^N)}+\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+C_4$, nên

$$\|u\|^2_{S^2_k(\mathbb{R}^N)}+\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{2|C_5|}{\mu}\quad\text{với mọi } t\geq T_1,$$

trong đó

$$T_1 := \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \ln \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0,u_1)}{|C_5|} & \text{nếu } \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0,u_1)}{|C_5|} > 1, \\ 0 & \text{nếu } \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0,u_1)}{|C_5|} \leq 1. \end{cases}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh với $M = \dfrac{2|C_5|}{\mu}$. □

Bổ đề 4.2.2. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2)–(4.5) và $U_0 \in \mathcal{B}$. Khi đó với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số dương $T(\epsilon)$ và $R(\epsilon)$ thỏa mãn*

$$\int\limits_{|X|_k \geq R} \Big(|u|^2 + |u_t|^2 + |\nabla_k u|^2\Big) \mathrm{d}X \leq \epsilon, \quad t \geq T(\epsilon), \quad R \geq R(\epsilon), \quad (4.11)$$

trong đó

$$|X|_k = \Big[|x|^{2(1+k)} + (1+k)^2|y|^2\Big]^{\frac{1}{2(1+k)}},$$

và $U(t)$ là nghiệm của Bài toán (4.6) với điều kiện ban đầu U_0.

Chứng minh. Ta sử dụng kỹ thuật hàm cắt để chứng minh các ước lượng đuôi nghiệm. Giả sử ϑ là một hàm trơn thỏa mãn $0 \leq \vartheta(s) \leq 1$ với $s \in \mathbb{R}_+$ và

$$\vartheta(s) = 0 \quad \text{khi} \quad 0 \leq s \leq 1; \qquad \vartheta(s) = 1 \quad \text{khi} \quad s \geq 2.$$

Khi đó tồn tại hằng số $C_\vartheta > 0$, thỏa mãn $|\vartheta'(s)| \leq C_\vartheta$ với mọi $s \in \mathbb{R}_+$. Ta có

$$\nabla_k \vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right) = \frac{1}{R^{2(1+k)}} \vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right) \nabla_k |X|_k^{2(1+k)},$$

trong đó

$$\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}$$
$$= 2(1+k)\Big(x_1|x|^{2k}, \ldots, x_{N_1}|x|^{2k}, (1+k)|x|^k y_1, \ldots, (1+k)|x|^k y_{N_2}\Big),$$

suy ra

$$|\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}| = 2(1+k)|x|^k |X|_k^{1+k}.$$

Nhân hai vế của phương trình (4.8) với $\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}_t\overline{u}\mathrm{d}X+\Big(\beta-\delta\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\overline{u}|^2\mathrm{d}X$$

$$+\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}u\mathrm{d}X=\int\limits_{\mathbb{R}^N}G_ku\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}\mathrm{d}X$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}\mathrm{d}X. \tag{4.12}$$

Nhưng

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\mathbb{R}^N}G_ku\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}\mathrm{d}X &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)(\nabla_ku,\nabla_k\overline{u})_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X\\
&+\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_ku)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)(\nabla_ku,(\delta\nabla_ku+\nabla_ku_t))_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X\\
&+\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_ku)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X\\
&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\nabla_ku|^2\mathrm{d}X+\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\nabla_ku|^2\mathrm{d}X\\
&+\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_ku)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X,
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}_t\overline{u}\mathrm{d}X=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\overline{u}|^2\mathrm{d}X,$$

và

$$\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}u\mathrm{d}X$$

$$=\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)u(u_t+\delta u)\mathrm{d}X$$

$$=\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|u|^2\mathrm{d}X$$

$$+\delta\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|u|^2\mathrm{d}X.$$

Đặt

$$\mathcal{C}(\overline{u},u)=\Big(\delta^2-\beta\delta+1\Big)|u|^2+|\nabla_k u|^2+|\overline{u}|^2.$$

Khi đó (4.12) trở thành

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\mathcal{C}(\overline{u},u)\mathrm{d}X=-\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\mathcal{C}(\overline{u},u)\mathrm{d}X$$

$$-\Big(\beta-2\delta\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\overline{u}|^2\mathrm{d}X+\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}\mathrm{d}X$$

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_k u)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X,$$

và từ (4.5) ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}\mathrm{d}X=\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)(u_t+\delta u)\mathrm{d}X$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)u_t\mathrm{d}X+\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)u\mathrm{d}X$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}F(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\mathrm{d}X+\delta\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)u\mathrm{d}X$$

$$\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u)\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\mathrm{d}X$$

$$+\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(F(X,u)-g_1(X)\Big)\mathrm{d}X.$$

Do đó ta có

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(\mathcal{C}(\overline{u},u)-2F(X,u)\Big)\mathrm{d}X$$

$$\leq -\mu\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(\mathcal{C}(\overline{u},u)-2F(X,u)\Big)\mathrm{d}X$$

$$-\Big(\beta-2\delta\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)|\overline{u}|^2\mathrm{d}X-\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)g_1(X)\mathrm{d}X$$

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_k u)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X$$

$$\leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\left[\mu\Big(\mathcal{C}(\overline{u},u)-2F(X,u)\Big)+\frac{\delta}{C_2}g_1(X)\right]\mathrm{d}X$$

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_k u)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X,$$

trong đó $\mu = \min\{\delta, \frac{\delta}{2C_2}\} > 0$.

Mặt khác, do $g_1(X) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $R_1 > 0$ thỏa mãn với mọi $R \geq R_1$, ta có

$$-\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)g_1(X)\mathrm{d}X=-\frac{\delta}{C_2}\int\limits_{|X|_k\geq R}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)g_1(X)\mathrm{d}X$$

$$\leq C\int\limits_{|X|_k\geq R}|g_1(X)|\mathrm{d}X\leq\frac{\epsilon}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_k u)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X =$$

$$= -\frac{1}{R^{2(1+k)}}\int\limits_{|X|_k\le 2R}\vartheta'\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\overline{u}(\nabla_k|X|_k^{2(1+k)},\nabla_k u)_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}X$$

$$\le \frac{C}{R^{2(1+k)}}\left(\int\limits_{|X|_k\le 2R}|\overline{u}|^2\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{|X|_k\le 2R}|\nabla_k|X|_k^{2(1+k)}|^2|\nabla_k u|^2\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{C}{R}\left(\int\limits_{|X|_k\le 2R}|\overline{u}|^2\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{|X|_k\le 2R}|\nabla_k u|^2\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\epsilon}{4}, \forall R\ge R_2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(\mathcal{C}(\overline{u},u)-2F(X,u)\Big)\mathrm{d}X$$

$$\le e^{-2\mu t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(\mathcal{C}(\overline{u}_0,u_0)-2F(X,u_0)\Big)\mathrm{d}X$$

$$+\quad \epsilon\Big(1-e^{-2\mu t}\Big), \qquad \forall R\ge R(\epsilon).$$

Do $U_0\in\mathcal{B}$ nên tồn tại hằng số $\mathcal{M}>0$, thỏa mãn

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\vartheta\left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}}\right)\Big(\mathcal{C}(\overline{u}_0,u_0)-2F(X,u_0)\Big)\mathrm{d}X\le\mathcal{M}.$$

Kết hợp với (4.9) và định nghĩa của hàm ϑ, ta có điều phải chứng minh. □

Từ Bổ đề 4.2.2, với mỗi $U = (u(t), u_t(t))$ là nghiệm của

Bài toán (4.6), với điều kiện ban đầu $U_0 = (u_0, u_1) \in \mathcal{B}$, ta có

$$\lim_{T,R\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{|X|_k \geq R} \Big(|u|^2 + |u_t|^2 + |\nabla_k u|^2\Big) \mathrm{d}X \mathrm{d}s = 0. \tag{4.13}$$

Bổ đề 4.2.3. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (4.2)–(4.5) và $U_n \rightharpoonup U$ trong $\mathcal{H}$. Khi đó với mỗi $t \geq 0$ ta có*

$$S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U \quad \textit{trong} \quad \mathcal{H}. \tag{4.14}$$

Chứng minh. Do $U_n \rightharpoonup U$ trong $\mathcal{H}$. Nên dãy $\{U_n\}$ là bị chặn trong không gian $\mathcal{H}$. Khi đó theo Bổ đề 4.2.1 ta có dãy $\{S(t)U_n\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ với mọi $T > 0$. Mà $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2) nên $\{f^*(S(t)U_n)\}$ cũng bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$. Mặt khác $S(t)U_n$ là nghiệm của phương trình (4.6) nên $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)U_n\right\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H}^{-1})$. Do đó có một dãy con $\{n_m\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \Theta(t) & \text{trong} \quad L^2(0, T; \mathcal{H}), \\ f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup \chi & \text{trong} \quad L^2(0, T; \mathcal{H}), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(t) & \text{trong} \quad L^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}). \end{cases} \tag{4.15}$$

Giả sử $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$, khi đó $S(t)U_n = \begin{pmatrix} S(t)u_n \\ S(t)v_n \end{pmatrix}$, nên

$$f^*(S(t)U_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta S(t)v_n + f(X, S(t)u_n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} S(t)u_{n_m} \rightharpoonup \theta_1(t) & \text{trong} \quad L^2(0, T; S_k^2(\mathbb{R}^N)), \\ S(t)v_{n_m} \rightharpoonup \theta_2(t) & \text{trong} \quad L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^N)), \end{cases} \tag{4.16}$$

và $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta\theta_2(t) + \chi* \end{pmatrix}$.

Chúng ta cần chứng minh $\chi* = f(\cdot, \theta_1(t))$.

Thật vậy, với mọi $v \in S_k^2(\mathbb{R}^N), t, t+a \in [0,T]$ ta có

$$(S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_t^{t+a} ((S(\tau)u_{n_m})', v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \mathrm{d}\tau$$

$$\leq \|v\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} \int_t^{t+a} \|(S(\tau)u_{n_m})'\|_{L^\infty(0,T;S_k^{-2}(\mathbb{R}^N))} \mathrm{d}\tau \leq Ca \|v\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)},$$

ở đó C là hằng số độc lập với n_m. Chọn $v = S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}$, ta có

$$\lim_{a\to 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \mathrm{d}t = 0, \ \forall T > 0. \tag{4.17}$$

Giả sử $\phi \in C^1([0,+\infty), [0,+\infty))$ là hàm thỏa mãn

$$0 \leq \phi(s) \leq 1, \quad \phi(s) = 1, \ \forall s \in [0,1], \quad \phi(s) = 0, \ \forall s \geq 2.$$

Với mỗi n_m và $\kappa \geq 1$, ta định nghĩa

$$\omega_{n_m,\kappa}(X,t) = \phi\Big(\frac{|X|^2}{\kappa^2}\Big) S(t)u_{n_m}.$$

Khi đó ta có với mọi $\kappa \geq 1$, dãy $\{\omega_{n_m,\kappa}\}_{n_m \geq 1}$ bị chặn trong không gian $L^2(0,T; S_{k,0}^2(\Omega_{2\kappa})) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega_{2\kappa}))$ với mọi $T > 0$. Hơn nữa, ta có

$$\lim_{a\to 0} \sup_{n_m} \Big(\int_0^a \|\omega_{n_m,\kappa}(X,t)\|^2_{L^2(\Omega_{2\kappa})} \mathrm{d}t + \int_{T-a}^T \|\omega_{n_m,\kappa}(X,t)\|^2_{L^2(\Omega_{2\kappa})} \mathrm{d}t \Big) = 0,$$

trong đó $\Omega_{2\kappa} = \{X \in \mathbb{R}^N : |X| < 2\kappa\}$.

Mặt khác từ (4.17), ta có với mọi $\kappa \geq 1$,

$$\lim_{a\to 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|\omega_{n_m,\kappa}(X,t+a) - \omega_{n_m,\kappa}(X,t)\|^2_{L^2(\Omega_{2\kappa})} \mathrm{d}t = 0.$$

Hơn nữa, do $\Omega_{2\kappa}$ là tập bị chặn nên không gian $S^2_{k,0}(\Omega_{2\kappa})$ nhúng compact vào không gian $L^2(\Omega_{2\kappa})$. Khi đó, do Bổ đề compact trong [63], ta có $\{\omega_{n_m,\kappa}\}_{n_m\geq 1}$ là compact tương đối trong $L^2(0,T;L^2(\Omega_{2\kappa}))$.

Mặt khác $\omega_{n_m,\kappa}(X,t) = S(t)u_{n_m}$ với mọi $X \in \Omega_\kappa$, ta có với mọi $\kappa \geq 1$ dãy $\{S(t)u_{n_m}|_{\Omega_\kappa}\}$ là tiền compact trong $L^2(0,T;L^2(\Omega_\kappa))$. Nên tồn tại một dãy con của dãy $\{S(t)u_{n_m}\}$ ký hiệu là $\{S(t)u^{n_m}_{n_m}\}_{n_m\geq 1}$ thỏa mãn

$$S(t)u^{n_m}_{n_m} \to \theta_1 \text{ trong } \Omega_\kappa \times (0,+\infty) \text{ khi } n_m \to \infty, \forall \kappa \geq 1.$$

Khi đó, do $f(\cdot,\cdot)$ là liên tục nên $f(X, S(t)u^{n_m}_{n_m}) \to f(X,\theta)$ hầu khắp nơi trong $\Omega_\kappa \times (0,+\infty)$. Mà dãy $\{f(X, S(t)u^{n_m}_{n_m})\}$ là bị chặn trong $L^2(\Omega_\kappa \times (0,T))$. Nên ta có

$$f(X, S(t)u^{n_m}_{n_m}) \rightharpoonup f(X,\theta_1) \text{ trong } L^2(0,T;L^2(\Omega_\kappa)).$$

Từ tính duy nhất của giới hạn ta có

$$\chi* = f(\cdot,\theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega_\kappa \times (0,T), \quad \forall T > 0, \forall \kappa \geq 1,$$

mà $\bigcup\limits_{\kappa=1}^{\infty} \Omega_\kappa = \mathbb{R}^N$, do vậy

$$\chi* = f(\cdot,\theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty).$$

Do đó ta có

$$f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup f^*(\Theta) \ \text{ trong } \ L^2(0,T;\mathcal{H}).$$

Do vậy ta có

$$e^{\mathbb{A}t}U_{n_m} + \int\limits_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(S(\tau)U_{n_m})\mathrm{d}\tau \rightharpoonup e^{\mathbb{A}t}U + \int\limits_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(\Theta)\mathrm{d}\tau \text{ trong } \mathcal{H}.$$

Do tính duy nhất của giới hạn nên ta có

$$\Theta(t) = e^{\mathbb{A}t}U + \int\limits_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(\Theta)\mathrm{d}\tau,$$

do tính duy nhất của nghiệm do vậy $\Theta = S(t)U$. Do mỗi dãy con của dãy $\{S(t)U_n, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)U_n\}$ có một dãy con hội tụ trong không gian $L^2(0,T;\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{-1})$ và giới hạn của mỗi dãy con này đều là $(S(t)U, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)U)$. Do vậy dãy $\{S(t)U_n, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)U_n\}$ hội tụ yếu đến $(S(t)U, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)U)$ trong $L^2(0,T;\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{-1})$. Do đó với mỗi $t \in [0,T]$ ta có $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong $\mathcal{H}^{-1}$. Mặt khác do với mỗi $t \in [0,T]$ dãy $\{S(t)U_n\}$ là bị chặn trong $\mathcal{H}$. Nên ta có $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong $\mathcal{H}$. □

Bổ đề 4.2.4. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2) và Ω là một miền trơn bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $u_n \rightharpoonup u$ trong $S_k^2(\Omega)$, $v_n \to v$ trong $L^2(\Omega)$. Khi đó*

$$\int_\Omega f(X,u_n)v_n\mathrm{d}X \to \int_\Omega f(X,u)v\mathrm{d}X \text{ khi } n\to\infty,$$

và

$$\int_\Omega F(X,u_n)\mathrm{d}X \to \int_\Omega F(X,u)\mathrm{d}X \text{ khi } n\to\infty.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega f(X,u_n)v_n\mathrm{d}X - \int_\Omega f(X,u)v\mathrm{d}X\Big| \\
&\quad = \Big|\int_\Omega \Big(f(X,u_n)v_n - f(X,u_n)v + f(X,u_n)v - f(X,u)v\Big)\mathrm{d}X\Big| \\
&\quad \le \int_\Omega \Big|f(X,u_n)v_n - f(X,u_n)v\Big|\mathrm{d}X + \int_\Omega \Big|f(X,u_n)v - f(X,u)v\Big|\mathrm{d}X \\
&\quad = \int_\Omega \Big|f(X,u_n)\Big|\Big|v_n - v\Big|\mathrm{d}X + \int_\Omega \Big|v\Big|\Big|f(X,u_n) - f(X,u)\Big|\mathrm{d}X \\
&\qquad \le \Big(\int_\Omega \Big|f(X,u_n)\Big|^2\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega \Big|v_n - v\Big|^2\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\quad + \Big(\int_\Omega \Big|f(X,u_n) - f(X,u)\Big|^2\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |v|^2\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Do $u_n \rightharpoonup u$ trong $S_k^2(\Omega), v_n \to v$ trong $L^2(\Omega)$ và $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2). Do vậy dãy $\{u_n\}$ là bị chặn trong $S_k^2(\Omega)$ và $\{f(X,u_n)\}$ bị chặn trong $L^2(\Omega)$ nên

$$\Big(\int\limits_{\Omega} \Big|f(X,u_n)\Big|^2 \mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega} \Big|v_n - v\Big|^2 \mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Lý luận tương tự như Định lí 3.2.1 ta có

$$\Big(\int\limits_{\Omega} \Big|f(X,u_n) - f(X,u)\Big|^2 \mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega} |v|^2 \mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do vậy

$$\int\limits_{\Omega} f(X,u_n)v_n \mathrm{d}X \to \int\limits_{\Omega} f(X,u)v \mathrm{d}X \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\int\limits_{\Omega} F(X,u_n)\mathrm{d}X \to \int\limits_{\Omega} F(X,u)\mathrm{d}X \text{ khi } n \to \infty.$$

□

Bổ đề 4.2.5. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện (4.2)–(4.5), B là tập bị chặn trong $\mathcal{H}$ và ϵ là một số dương cố định. Khi đó tồn tại $T_0 = T_0(\epsilon, B)$ sao cho với mỗi dãy $\{U_n\}$ là dãy bị chặn trong B, hội tụ yếu về U trong $\mathcal{H}$ ta có*

$$\limsup_{n\to\infty} \|S(T)U_n\|_{\mathcal{H}} \le \|S(T)U_0\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \quad \textit{với mọi} \quad T \ge T_0. \tag{4.18}$$

Chứng minh. Đặt

$$E(u(t), u_t(t)) := \frac{1}{2}\left(\|\nabla_k u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \big\|u_(t)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right),$$

$$[B(0,R)] = \big\{X \in \mathbb{R}^N, |X|_k \le R\big\} \text{ với mỗi } R \in \mathbb{R}^*_+$$

và giả sử $S(t)U_n = (u_n(t), u_{nt}(t))$ là nghiệm của Bài toán (4.6) cùng với điều kiện ban đầu $U_n = (u_n(0), u_{nt}(0))$ và $S(t)U_0 = (u(t), u_t(t))$ là nghiệm của bài toán với điều kiện ban đầu $U_0 = (u(0), u_t(0))$. Từ Bổ đề 4.2.1 suy ra tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\sup_{t\geq 0, n\geq 0} \|S(t)U_n\|_{\mathcal{H}} \leq C. \tag{4.19}$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (4.1) với $u_t + \frac{\beta}{2}u$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big[\Big(u_t + \frac{\beta}{2}u\Big)^2 + \Big(1 - \frac{\beta^2}{4}\Big)^2 u^2 + |\nabla_k u|^2 - 2F(X,u)\Big]\mathrm{d}X \\
&= -\frac{\beta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big(u_t + \frac{\beta}{2}u\Big)^2\mathrm{d}X - \frac{\beta}{2}\Big(1 - \frac{\beta^2}{4}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^2\mathrm{d}X \\
&- \frac{\beta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla_k u|^2\mathrm{d}X + \frac{\beta}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u)u\mathrm{d}X.
\end{aligned}$$

Sử dụng tích chất của hàm $f(X,u)$, đánh giá tương tự như Bổ đề 4.2.1, ta có

$$\begin{aligned}
&\left\|u_t + \frac{\beta}{2}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u)\mathrm{d}X \\
&\leq e^{-\frac{\beta}{2}t}\Bigg(\left\|u_t(0) + \frac{\beta}{2}u(0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \|\nabla_k u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u(0))\mathrm{d}X - C_1\Bigg) + C_1, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Do đó tồn tại $C_2 > 0$, với mọi $t \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left\|u_t + \frac{\beta}{2}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\qquad - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u)\mathrm{d}X \leq C_2.
\end{aligned}$$

Từ (4.10) suy ra

$$\left\|u_t + \frac{\beta}{2}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u)\mathrm{d}X \le C_3.$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (4.1) với $u_t + \frac{\beta}{2}u$ và tích phân trên $[0,T]\times\mathbb{R}^N$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big(|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla_k u|^2 - f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\left\|u_t(0) + \frac{\beta}{2}u(0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \|\nabla_k u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\Bigg] - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u(0))\mathrm{d}X + \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X,u(T))\mathrm{d}X \\
&-\frac{1}{2}\Bigg[\left\|u_t(T) + \frac{\beta}{2}u(T)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)\|u(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \|\nabla_k u(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\Bigg].
\end{aligned}$$

Do đó

$$\left|\int\limits_0^T\left[E(u(t),u_t(t)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u)u\mathrm{d}X\right]\mathrm{d}t\right| \le C. \tag{4.20}$$

Tương tự như (4.20), do B là bị chặn trong $\mathcal{H}$ và $U_n \in B$, với mỗi $T \ge 0$ ta có

$$\left|\int\limits_0^T\left[E(u_n(t),u_{nt}(t)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(X,u_n)u_n\mathrm{d}X\right]\mathrm{d}t\right| \le C. \tag{4.21}$$

Nhân phương trình một của Bài toán (4.1) với u_t và tích phân trên $[t, T] \times \mathbb{R}^N$, ta có

$$E(u(T), u_t(T)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X,T))\mathrm{d}X + \beta \int\limits_t^T \|u_\tau\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= E(u(t), u_t(t)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X,t))\mathrm{d}X. \tag{4.22}$$

Từ (4.20) và (4.22), ta có

$$E(u(T), u_t(T)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X,T))\mathrm{d}X + \frac{\beta}{T}\int\limits_0^T\int\limits_t^T \|u_\tau\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[E(u(t), u_t(t)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X,t))\mathrm{d}X\right]\mathrm{d}t$$
$$\geq \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(-F(X, u(X,t)) + f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t - \frac{C}{T}. \tag{4.23}$$

Từ (4.21) và (4.22), ta có

$$E(u_n(T), u_{nt}(T)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X,T))\mathrm{d}X + \frac{\beta}{T}\int\limits_0^T\int\limits_t^T \|u_{n\tau}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(-F(X, u_n(X,t)) + f(X,u_n)u_n\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t + \frac{C}{T}. \tag{4.24}$$

Từ (4.23) và (4.24), suy ra

$$E(u_n(T), u_{nt}(T)) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X,T))\mathrm{d}X + \frac{\beta}{T}\int\limits_0^T\int\limits_t^T \|u_{n\tau}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big(F(X,u(X,t))-F(X,u_n(X,t))\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big(f(X,u_n)u_n-f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t+E(u(T),u_t(T))$$

$$-\int_{\mathbb{R}^N}F(X,u(X,T))\mathrm{d}X+\frac{\beta}{T}\int_0^T\int_t^T\|u_\tau\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\frac{2C}{T},$$

hay

$$E(u_n(T),u_{nt}(T))\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big(F(X,u(X,t))-F(X,u_n(X,t))\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big(f(X,u_n)u_n-f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t+E(u(T),u_t(T))$$

$$+\left(\int_{\mathbb{R}^N}F(X,u_n(X,T))\mathrm{d}X-\int_{\mathbb{R}^N}F(X,u(X,T))\mathrm{d}X\right)+\frac{2C}{T}$$

$$+\frac{\beta}{T}\left(\int_0^T\int_t^T\|u_\tau\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t-\int_0^T\int_t^T\|u_{n\tau}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\right). \tag{4.25}$$

Từ $U_n \rightharpoonup U$ suy ra $u_{nt} \rightharpoonup u_t$, và bởi tính nửa liên tục yếu của chuẩn, ta có

$$\liminf_{n\to\infty}\|u_{nt}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\geq\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

khi đó với mỗi $\epsilon>0$ tồn tại $N_0>0$ sao cho với mọi $N>N_0$, ta có

$$\int_0^T\int_t^T\|u_\tau\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t-\int_0^T\int_t^T\|u_{n\tau}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\leq\epsilon. \tag{4.26}$$

Từ Bổ đề 4.2.4, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{[B(0,R)]}\Big(F(X,u(X,t))-F(X,u_n(X,t))\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t=0, \quad (4.27)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{[B(0,R)]}\Big(f(X,u_n)u_n-f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t=0, \quad (4.28)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{[B(0,R)]}\Big(F(X,u_n(X,T))-F(X,u(X,T))\Big)\mathrm{d}X=0. \quad (4.29)$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)]}\Big(F(X,u(X,t))-F(X,u_n(X,t))\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t\right|\\
&\le\frac{C}{T}\int\limits_0^T\Bigg\{\|u_n-u\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\Bigg[\Big(\|u\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\\
&\quad+\|u_n\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\Big)+\|f(X,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\\
&+\|g\|_{L^{N_k}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\left(\|u\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}+\|u_n\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\right)\Bigg]\Bigg\}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)]}\Big(f(X,u_n)u_n-f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t\right|\\
&\le\frac{C}{T}\int\limits_0^T\Bigg\{\|u_n-u\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\Big(\|g\|_{L^{N_k}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\|u_n\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\\
&\quad+\|u_n\|^{\rho}_{L^{r_1\rho}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\|u_n\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}+\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\\
&\quad+\|u\|^{\rho}_{L^{r_1\rho}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\|u_n\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)])}\Big)\Bigg\}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

trong đó $r_1 = \dfrac{2N_k}{(N_k-2)\rho}$ nếu $\rho \neq 0$, $r_1 = N_k$ nếu $\rho = 0$ và $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$.

Vì vậy, từ Bổ đề 4.2.2 và (4.13), ta có với mỗi số $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại T_0 và R_0 thỏa mãn với mọi $T \geq T_0, R \geq R_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)]} \Big(F(X,u(X,t)) - F(X,u_n(X,t))\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t \\
&+ \quad \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)]} \Big(f(X,u_n)u_n - f(X,u)u\Big)\mathrm{d}X\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus[B(0,R)]} \Big(F(X,u_n(X,T)) - F(X,u(X,T))\Big)\mathrm{d}X + \frac{C}{T} \leq \epsilon. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Do đó từ (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) và (4.30), sau đó chuyển qua giới hạn, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} E(u_n(T), u_{nt}(T)) \leq E(u(T), u_t(T)) + \epsilon,$$

suy ra điều phải chứng minh. □

Bây giờ ta chứng minh tính compact tiệm cận của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$.

Định lí 4.2.6. *Giả sử $f(X,u)$ thỏa mãn các điều kiện (4.2)–(4.5). Khi đó $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là compact tiệm cận trong $\mathcal{H}$, nghĩa là, với mọi dãy bị chặn $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ và mọi dãy không âm $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $t_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, khi đó $\{S(t_n)U_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một dãy con hội tụ trong $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 4.2.1, ta có tồn tại một tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong $\mathcal{H}$ thỏa mãn $S(t_n)U_n \subset \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}$, do đó tồn tại $U \in \mathcal{H}$ và một dãy con $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho

$$S(t_{n_k})U_{n_k} \rightharpoonup U \text{ trong } \mathcal{H},$$

nên

$$\liminf_{k\to+\infty} \|S(t_{n_k})U_{n_k}\|_{\mathcal{H}} \geq \|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.31}$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh tồn tại một dãy con của dãy $S(t_{n_k})U_{n_k}$ hội tụ mạnh tới U trong $\mathcal{H}$, bằng cách chúng ta sẽ xây dựng dãy con $S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}$ của $S(t_{n_k})U_{n_k}$ thỏa mãn

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Thật vậy, từ Bổ đề 4.2.5 ta có với mỗi $l > 0$ tồn tại $T_0 = T_0(l, \mathcal{B})$ sao cho với mỗi $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{B}, \varphi_i \rightharpoonup \varphi$ trong $\mathcal{H}$, ta có

$$\limsup_{i\to\infty} \|S(T_0)\varphi_i\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(T_0)\varphi\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}. \tag{4.32}$$

Vì $t_{n_k} \geq T_0$, khi đó ta có

$$S(t_{n_k} - T_0)U_{n_k} \subset \mathcal{B}.$$

Do đó có U_{T_0} và một dãy con $\{n_{k_{j(l)}}\}_{j(l)=1}^{\infty}$ của dãy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ thỏa mãn

$$S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}} \rightharpoonup U_{T_0} \text{ trong } \mathcal{H}, \tag{4.33}$$

nên sử dụng Bổ đề 4.2.3, suy ra

$$S(t_{n_{k_{j(l)}}})U_{n_{k_{j(l)}}} = S(T_0)S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}} \rightharpoonup S(T_0)U_{T_0} \text{ trong } \mathcal{H}.$$

Do tính duy nhất của giới hạn nên $U = S(T_0)U_{T_0}$.

Lấy $\varphi_{k_{j(l)}} = S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}}$ trong (4.32), ta có

$$\limsup_{j(l)\to\infty} \left\|S(T_0)S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(T_0)U_{T_0}\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}.$$

Suy ra,

$$\limsup_{j(l)\to\infty} \left\|S(t_{n_{k_{j(l)}}})U_{n_{k_{j(l)}}}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}. \tag{4.34}$$

Với $l = 1$ từ (4.34) tồn tại $j_1(1)$ thỏa mãn

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_1(1)}}}) U_{n_{k_{j_1(1)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + 2.$$

Ta định nghĩa $j_1(1)$ bởi j_1.

Với $l = 2$ từ (4.34) tồn tại $j_2(2)$ thỏa mãn $n_{k_{j_1}} < n_{k_{j_2(2)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_2(2)}}}) U_{n_{k_{j_2(2)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + 1.$$

Ta định nghĩa $j_2(2)$ bởi j_2.

Tương tự, với $l = m$ từ (4.34) tồn tại $j_m(m)$ thỏa mãn $n_{k_{j_{m-1}}} < n_{k_{jm(m)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{jm(m)}}}) U_{n_{k_{jm(m)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{2}{m}.$$

Ta định nghĩa $j_m(m)$ bởi j_m.

Cứ làm như vậy ta có dãy $\{n_{k_{j_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ và thỏa mãn

$$\limsup_{i \to \infty} \left\| S(t_{n_{k_{j_i}}}) U_{n_{k_{j_i}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Ta chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong $\mathcal{H}$.

Định lí 4.2.7. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2)–(4.5). Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh ra bởi Bài toán (4.1) có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ trong $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Kí hiệu

$$\mathcal{B} = \left\{ U \in \mathcal{H} : \|U\|_{\mathcal{H}}^2 < M \right\},$$

ở đây M là hằng số trong (4.7). Khi đó $\mathcal{B}$ là tập hấp thụ của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$. Hơn nữa, $S(t)$ là compact tiệm cận trong $\mathcal{H}$ do Định lí 4.2.6. Vì vậy, ta có sự tồn tại tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$. $\square$

Ví dụ 4.2.8. Ta sẽ chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial t} + u = G_{\frac{1}{2}} u + f(X, u) \text{ với } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y) \text{ với } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

trong đó $u_0(x, y) \in S^2_{1/2}(\mathbb{R}^2), u_1(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, β là các hằng số dương

$$G_{\frac{1}{2}} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |x| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

và

$$f(X, u) = \begin{cases} \frac{-u\left(1-u^2\right)}{|X|^4+1} & \text{khi } \ |u| \leq 1, |X|^2 = x^2 + y^2, \\ \frac{u\left(1-u^2\right)}{|X|^4+1} & \text{khi } \ |u| \geq 1. \end{cases}$$

Đặt

$$F(X, u) = \int_0^u f(X, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Nếu $|u| \leq 1$ ta có

$$F(X, u) = \int_0^u \frac{-\xi(1 - \xi^2)}{|X|^4 + 1} \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{|X|^4 + 1} \Big(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \Big).$$

Nếu $|u| \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} F(X, u) &= \int_0^u f(X, \xi) \mathrm{d}\xi = \int_0^1 f(X, \xi) \mathrm{d}\xi + \int_1^u f(X, \xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1 \frac{-\xi(1 - \xi^2)}{|X|^4 + 1} \mathrm{d}\xi + \int_1^u \frac{\xi(1 - \xi^2)}{|X|^4 + 1} \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|X|^4+1}\Big(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}-\frac{1}{2}\Big).$$

Do đó

$$F(X,u)=\begin{cases}\frac{-1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}\right) & \text{khi } |u|\le 1,\\ \frac{1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}-\frac{1}{2}\right) & \text{khi } |u|\ge 1.\end{cases}$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi kiểm tra các điều kiện (4.2)–(4.5) đối với hàm $f(X,u)$ trong điều kiện (4.2) là $C=3, \rho=4, g(X)=\frac{1}{|X|^4+1}+\frac{1}{(|X|^4+1)^2}\in L^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^N)\cap L^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^N)$ và $N_{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$.

Thật vậy, nếu $|u|$ và $|v|$ cùng nhỏ hơn bằng 1 hoặc cùng lớn hơn bằng 1, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}|f(X,u)-f(X,v)| &= \Big|\frac{u\left(1-u^2\right)}{|X|^4+1}-\frac{v\left(1-v^2\right)}{|X|^4+1}\Big|\\ &= \Big|\frac{1}{|X|^4+1}\Big|\Big|u\left(1-u^2\right)-v\left(1-v^2\right)\Big|\\ &\le \Big|\frac{1}{|X|^4+1}\Big|\Big|u-v\Big|\Big|1+\frac{3}{2}u^2+\frac{3}{2}v^2\Big|\\ &\le \Big|u-v\Big|\Big|u^4+v^4+\frac{1}{|X|^4+1}+\Big(\frac{1}{|X|^4+1}\Big)^2\Big|.\end{aligned}$$

Nếu $|u|$ và $|v|$ có một số lơn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1 khi đó ta có

$$|u-1|\le|u-v|, |v-1|\le|u-v|,$$

$$\begin{aligned}|f(X,u)-f(X,v)| &\le |f(X,u)-f(X,1)|+|f(X,1)-f(X,v)|\\ &\le \Big|u-1\Big|\Big|u^4+1+\frac{1}{|X|^4+1}+\Big(\frac{1}{|X|^4+1}\Big)^2\Big|\\ &+ \Big|v-1\Big|\Big|1+v^4+\frac{1}{|X|^4+1}+\Big(\frac{1}{|X|^4+1}\Big)^2\Big|\\ &\le \Big|u-v\Big|\Big(2+u^4+v^4+\frac{2}{|X|^4+1}+2\Big(\frac{1}{|X|^4+1}\Big)^2\Big)\\ &\le 3\Big|u-v\Big|\left(u^4+v^4+\frac{1}{|X|^4+1}+\Big(\frac{1}{|X|^4+1}\Big)^2\right).\end{aligned}$$

Vậy hàm $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện (4.2).

Ta có $f(X,0)=0\in L^2(\mathbb{R}^2)$, nên $f(X,u)$ thỏa mãn điều kiện (4.3).

Với điều kiện (4.4), ta chọn $C_1=\frac{1}{4}, g_1(X)=-\frac{1}{4(|X|^4+1)}\in L^1(\mathbb{R}^2)$. Thật vậy, ta tìm C_1 và $g_2(X)=\frac{C_2}{|X|^4+1}$ thỏa mãn

$$
\begin{aligned}
& F(X,u)\geq C_1 f(X,u)u+\frac{C_2}{|X|^4+1}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases}\frac{-1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}\right)\geq C_1\frac{-u\left(1-u^2\right)}{|X|^4+1}+\frac{C_2}{|X|^4+1} & \text{khi } |u|\leq 1,\\ \frac{1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}-\frac{1}{2}\right)\geq C_1u\left(1-u^2\right)+C_2 & \text{khi } |u|\geq 1,\end{cases}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases}-1\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}\right)\geq -uC_1\left(1-u^2\right)+C_2 & \text{khi } |u|\leq 1,\\ \frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}-\frac{1}{2}\geq C_1u\left(1-u^2\right)+C_2 & \text{khi } |u|\geq 1,\end{cases}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases}\left(\frac{1}{4}-C_1\right)u^4+\left(C_1-\frac{1}{2}\right)u^2\geq C_2 & \text{khi } |u|\leq 1,\\ \left(C_1-\frac{1}{4}\right)u^4+\left(\frac{1}{2}-C_1\right)u^2\geq C_2+\frac{1}{2} & \text{khi } |u|\geq 1,\end{cases}
\end{aligned}
$$

ta chọn $C_1=\frac{1}{4}$ khi đó C_2 thỏa mãn

$$
\begin{cases}-\frac{1}{4}u^2\geq C_2 & \text{khi } |u|\leq 1,\\ \frac{1}{4}u^2\geq C_2+\frac{1}{2} & \text{khi } |u|\geq 1,\end{cases}
$$

nên ta chọn $C_2=-\frac{1}{4}$. Khi đó ta có

$$
F(X,u)\geq \frac{1}{4}f(X,u)u-\frac{1}{4(|X|^4+1)},\ \forall X\in\mathbb{R}^2, u\in\mathbb{R}.
$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}\right)\leq 0,\ \forall X\in\mathbb{R}^2, \forall |u|\leq 1,\\
&\frac{1}{|X|^4+1}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}-\frac{1}{2}\right)\leq 0,\ \forall X\in\mathbb{R}^2, \forall |u|\geq 1.
\end{aligned}
$$

Nên $F(X, u(X)) \leq 0$, với mọi $u \in S^2_{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Vậy hàm $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (4.5).

Do đó $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (4.2)–(4.5). Nên áp dụng Định lí 4.2.7, ta có Ví dụ 4.2.8 tồn tại một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{S^2_{1/2}(\mathbb{R}^2)\times L^2(\mathbb{R}^2)}$ trong $S^2_{1/2}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ đối với nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Ví dụ 4.2.8.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian, với số hạng phi tuyến thỏa mãn một số tính chất. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân của bài toán (Định lí 4.1.5).

2) Chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán (Định lí 4.2.7).

Các kết quả của Chương 4 là sự mở rộng các kết quả tương ứng trước đó đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic trong toàn không gian trong [27, 33] cho toán tử Grushin và hàm phi tuyến. Phương pháp được sử dụng ở đây là phương pháp ước lượng đuôi nghiệm cho hình cầu suy biến tương ứng với toán tử Grushin.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, tính chính quy của nghiệm của bài toán biên có chứa phương trình elliptic suy biến trong miền bị chặn có biên trơn và sự tồn tại nghiệm toàn cục, tập hút toàn cục của bài toán biên giá trị ban đầu đối với phương trình hyperbolic tắt dần có chứa toán tử elliptic suy biến. Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đối với bài toán biên elliptic suy biến đưa ra và chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán với một số điều kiện của số hạng phi tuyến, và tính chính quy của nghiệm.

2. Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trong miền bị chặn: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục liên thông compact trong không gian $S^2_{(k_1,k_2),0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ và chứng minh được số chiều fractal của tập hút là hữu hạn.

3. Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S^2_k(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu như:

1. Nghiên cứu điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán biên nói trên trong miền không bị chặn, trong miền bị chặn với điều kiện biên Dirichlet không thuần nhất.

2. Nghiên cứu sự tồn tại tập hút khi hàm phi tuyến phụ thuộc thời gian như tập hút lùi, tập hút đều và các tính chất của tập hút.

3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic suy biến với các điều kiện biên khác nhau, chẳng hạn điều kiện biên không thuần nhất, điều kiện biên Neumann, điều kiện biên hỗn hợp, điều kiện biên phi tuyến, ... Để làm được điều này cần xây dựng được không gian có trọng tương ứng, định lí nhúng kiểu Sobolev.

4. Nghiên cứu các mô hình ứng dụng thực tế.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1]. D. T. Luyen and N. M. Tri (2012), On boundary value problem for semilinear degenerate elliptic differential equations. *AIP Conf. Proc.* 1450, 13–17.

[2]. D. T. Luyen and N. M. Tri (2015), Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations. *Mathematical Notes,* Vol. 97, No. 1, 73–84.

[3]. D. T. Luyen and N. M. Tri (2016), Large - time behavior of solutions to damped hyperbolic equation involving strongly degenerate elliptic differential operators. *Siberian Mathematical Journal,* Vol. 57, No. 4, 632–649.

[4]. D. T. Luyen and N. M. Tri (2016), Global attractor of the Cauchy problem for a semilinear degenerate damped hyperbolic equation involving the Grushin operator. *Annales Polonici Mathematici,* Vol. 117, No. 2, 141–162.

Tài liệu tham khảo

[1] C. T. Anh (2010), Pullback attractors for non-autonomous parabolic equations involving Grushin operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 11, 1–14.

[2] C. T. Anh (2014), Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation on $\mathbb{R}^N$. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 21, no. 5, 663–678.

[3] C. T. Anh; P. Q. Hung; T. D. Ke; T. T. Phong (2008), Global attractor for a semilinear parabolic equation involving the Grushin operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 32, 1–11.

[4] C. T. Anh; T. D. Ke (2009), Existence and continuity of global attractors for a degenerate semilinear parabolic equation. *Electron. J. Differential Equations*, no. 61, 1–13.

[5] C. T. Anh; B. K. My (2016), Existence of solutions to $\Delta_\lambda-$Laplace equations without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 1, 137–150.

[6] C. T. Anh; B. K. My (2016), Liouville-type theorems for elliptic inequalities involving the $\Delta_\lambda-$Laplace operator. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 7, 1002–1013.

[7] C. T. Anh; N. V. Quang (2011), Uniform attractors for a non-autonomous parabolic equation involving Grushin operator. *Acta Math. Vietnam.* 36, no. 1, 19–33.

[8] C. T. Anh; V. M. Toi (2013), Null controllability of a parabolic equation involving the Grushin operator in some multi-dimensional domains. *Nonlinear Anal.* 93, 181–196.

[9] C. T. Anh; V. M. Toi (2016), Null controllability in large time of a parabolic equation involving the Grushin operator with an inverse-square potential. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 23, no. 2, Art. 20, 26 pp.

[10] J. M. Arrieta; A. N. Carvalho; J. K. Hale (1992), A damped hyperbolic equation with critical exponent. *Comm. Partial Differential Equations* 17, no. 5–6, 841–866.

[11] A. V. Babin; M. I. Vishik (1983), Regular attractors of semigroups and evolution equations. *J. Math. Pures Appl.* (9) 62, no. 4, 441–491.

[12] A. V. Babin; M. I. Vishik (1990), Attractors of partial differential evolution equations in an unbounded domain. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A116, no. 3–4, 221–243.

[13] A. V. Babin; M. I. Vishik (1992), *Attractors of Evolution Equations.* Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin. Studies in Mathematics and its Applications, 25. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. x+532 pp.

[14] J. M. Ball (2004), Global attractor for damped semilinear wave equations. *Partial differential equations and applications. Discrete Contin. Dyn. Syst.* 10, no. 1–2, 31–52.

[15] K. Beauchard; P. Cannarsa; R. Guglielmi (2014), Null controllability of Grushin-type operators in dimension two. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16, no. 1, 67–101.

[16] T. Bieske (2002), Viscosity solutions on Grushin type planes. *Illinois J. Math.* 46, no. 3, 893–911.

[17] H. Brezis; L. Nirenberg (1983), Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* 36, no. 4, 437–477.

[18] F. E. Browder (1956), On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 9, 351–361.

[19] C. Budd; M. C. Knaap; L. A. Pelrtier (1991), Asymptotic behaviour of solutions of Elliptic equations with critical exponents and neumann boundary conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A117, 225–250.

[20] L. Capogna; D. Danielli; N. Garofalo (1993), An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations* 18, no. 9–10, 1765–1794.

[21] A. Carvalho; J. A. Langa; J. C. Robinson (2013), *Attractors for Infinite Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems.* Applied Mathematical Sciences, 182. Springer, New York. xxxvi+409 pp.

[22] V. V. Chepyzhov; M. I. Vishik (2002), *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. American Mathematical Society, Providence, RI. xii+363 pp.

[23] I. D. Chueshov (1999), *Introduction to the theory of infinite - dimensional dissipative systems.* [University Lectures in Contemporary Mathematics] AKTA, Kharkiv. 436 pp.

[24] N. M. Chuong; T. D. Ke; N. V. Thanh; N. M. Tri (1999), Non - existence theorem for boundary value problem for some classes of semilinear degenerate elliplic operators. *Proceeding of the conference on PDEs and their applications*, Hanoi Dec, 185–190.

[25] N. M. Chuong; T. D. Ke (2004), Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system. *Electron. J. Differential Equations*, no. 93, 15 pp.

[26] N. M. Chuong; T. D. Ke (2005), Existence results for a semilinear parametric problem with Grushin type operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 107, 12 pp.

[27] Fall Djiby (2005), *Longtime dynamics of hyperbolic evolutionary equations in ubounded domains and lattice systems*. Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida, http://scholarcommons.usf.edu/etd/2875.

[28] E. Feireisl (1994), Attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^3$. *Nonlinear Anal.* 23, no. 2, 187–195.

[29] A. Friedman (1958), On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. *J. Math. Mech.* 7, 43–59.

[30] D. Gilbarg; N. Trudinger (2001), *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. xiv+517 pp.

[31] V. V. Grushin (1970), A certain class of hypoelliptic operators. (Russian) *Mat. Sb.*(N.S.) 83 (125), 456–473.

[32] V. V. Grushin (1971), A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold. (Russian) *Mat. Sb.* (N.S.) 84 (126), 163–195.

[33] H. B. Xiao (2009), Global attractors for semilinear damped wave equations with critical exponent on $\mathbb{R}^N$. *Chaos Solitons Fractals* 41, no. 5, 2546–2552.

[34] J. K. Hale (1985), Asymptotic behaviour and dynamics in infinite dimensions. *Nonlinear differential equations* (Granada, 1984), 1–42, *Res. Notes in Math.,* 132, Pitman, Boston, MA.

[35] J. K. Hale (1988), *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Mathematical Surveys and Monographs, 25. American Mathematical Society, Providence, RI. x+198 pp.

[36] J. K. Hale; G. Raugel (1993), Attractors for dissipative evolutionary equations. *International Conference on Differential Equations*, Vol. 1, 2 (Barcelona, 1991), 3–22, *World Sci. Publ., River Edge, NJ,*.

[37] A. Haraux (1985), Two remarks on hyperbolic dissipative problems. (French summary) *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collège de France seminar, Vol. VII (Paris, 1983–1984), 6, 161–179, Res. Notes in Math., 122, Pitman, Boston, MA.

[38] B. Helffer; J. Nourrigat (1985), *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*. (French) [Maximal hypoellipticity for polynomial operators of vector fields] Progress in Mathematics, 58. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. x+278pp.

[39] L. Hörmander (1966), Psedo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math.*(2) 83, 129–209.

[40] D. S. Jerison; J. M. Lee (1987), The Yamabe problem on CR manifolds. *J. Differential Geom.* 25, no. 2, 167–197.

[41] N. I. Karachalios; N. M. Stavrakakis (1999), Existence of a global attractor for semilinear dissipative wave equations on $\mathbb{R}^N$. *J. Differential Equations* 157, no. 1, 183–205.

[42] T. T. Khanh; N. M. Tri (2010), On the analyticity of solutions to semilinear differential equations degenerated on a submanifold. *J. Differential Equations* 249, no. 10, 2440–2475.

[43] A. Kh. Khanmamedov (2005), Existence of a global attractor for the plate equation with a critical exponent in an unbounded domain. *Appl. Math. Lett.* 18, no. 7, 827–832.

[44] A. E. Kogoj; E. Lanconelli (2012), On semilinear $\Delta_\lambda-$Laplace equation. *Nonlinear Anal.* 75, no. 12, 4637–4649.

[45] A. E. Kogoj; S. Sonner (2013), Attractors for a class of semi-linear degenerate parabolic equations. *J. Evol. Equ.* 13, no. 3, 675–691.

[46] A. E. Kogoj; S. Sonner (2014), Attractors met $X-$elliptic operators. *J. Math. Anal. Appl.* 420, no. 1, 407–434.

[47] A. E. Kogoj; S. Sonner (2016), Hardy type inequalities for $\Delta_\lambda-$Laplacians. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 3, 422–442.

[48] E. Lanconelli; A. E. Kogoj (2000), $X-$elliptic operators and $X-$control distances. *Contributions in honor of the memory of Ennio De Giorgi (Italian). Ricerche Mat.* 49, suppl., 223–243.

[49] D. Li; C. Sun (2016), Attractors for a class of semi-linear degenerate

parabolic equations with critical exponent. *J. Evol. Equ.* 16, no. 4, 997–1015.

[50] D. T. Luyen (2017), Two nontrivial solutions of boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Math. Notes* 101, no. 5, 815–823.

[51] J. Málek; D. Pražák (2002), Large time behavior via the method of $\ell-$trajectories. *J. Differential Equations* 181, no. 2, 243–279.

[52] A. Miranville; S. Zelik (2008), *Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains*. Handbook of differential equations: evolutionary equations. Vol. IV, 103–200, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam.

[53] A. Pazy (1983), *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York. viii+279 pp.

[54] S. I. Pohozaev (1965), On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 165, 33–36.

[55] D. Pražák (2002), On finite fractal dimension of the global attractor for the wave equation with nonlinear damping. *J. Dynam. Differential Equations* 14, no. 4, 763–776.

[56] D. T. Quyet; L. T. Thuy; N. X. Tu (2016), Semilinear strongly degenerate parabolic equation with a new class of nonlinearities. *Vietnam J. Math.* doi:10.1007/s10013-016-0228-5.

[57] G. Raugel (2002), *Global Attractors in Partial Differential Equations*. Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 885–982, North-Holland, Amsterdam.

[58] J. C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, xviii+461 pp.

[59] G. R. Sell; Y. You (2002), *Dynamics of Evolutionary Equations*. Applied Mathematical Sciences, 143. Springer-Verlag, New York. xiv+670 pp.

[60] M. Struwe (1996), *Variational Methods*. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 34. Springer-Verlag, Berlin. xvi+272 pp.

[61] D. Tartakoff; L. Zanghirati (2005), Local real analyticity of solutions for sums of squares of non-linear vector fields. *J. Differential Equations*, 213, no. 2, 341–351.

[62] R. Temam (1988), *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York. xvi+500 pp.

[63] R. Temam (1995), *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 66. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. xiv+141 pp.

[64] N. T. C. Thuy; N. M. Tri (2002), Some existence and nonexistence results for boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators. *Russ. J. Math. Phys.* 9, no. 3, 365–370.

[65] P. T. Thuy; N. M. Tri (2012), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 19, no. 3, 279–298.

[66] P. T. Thuy; N. M. Tri (2013), Long time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 20, no. 3, 1213–1224.

[67] F. Treves, Symplectic geometry and analytic hypo-ellipticity. Differential equations: La Pietra 1996 (Florence), 201–219, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 65, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI.

[68] N. M. Tri (1998), On the Grushin equation. *Mat. Zametki* 63, no. 1, 95–105; translation in *Math. Notes* 63, no. 1–2, 84–93.

[69] N. M. Tri (1998), Critical Sobolev exponent for degenerate elliptic operators. *Acta Math. Vietnam.* 23, no. 1, 83–94.

[70] N. M. Tri (1999), Semilinear perturbation of powers of the Mizohata operators. *Comm. Partial Differential Equations* 24, no. 1–2, 325–354.

[71] N. M. Tri (2008), Semilinear hypoelliptic differential operators with multiple characteristics. *Trans. Amer. Math. Soc.* 360, no. 7, 3875–3907.

[72] N. M. Tri (2010), *Semilinear Degenerate Elliptic Differential Equations, Local and global theories*. Lambert Academic Publishing, 271p.

[73] N. M. Tri (2014), *Recent Progress in the Theory of Semilinear Equations Involving Degenerate Elliptic Differential Operators*. Publishing House for Science and Technology of the Vietnam Academy of Science and Technology, 380p.

[74] B. Wang (1999), Attractors for reaction-diffusion equation in unbounded domains. *Phys. D* 128, no. 1, 41–52.

[75] C. J. Xu (1992), Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 45, no. 1, 77–96.